

【問題】

横に長い長方形の紙を、右半分が左半分の上に重なるように折ります。

このような操作を 1 回と考えると、折ってできた長方形に対して、同様の操作をくり返し行います。

何回かの操作の後、再び長方形の紙を最初の状態にひろげると、折り目の線で区切られたいくつかの長方形ができます。

たとえば、2 回の操作を行ってひろげると、図 1 のようになります。

図 1 に示した数は、折ったときに下から何番目にあった長方形かを表したものです。

【図 1】

1	4	3	2
---	---	---	---

次の問いに答えなさい。

なお、問題用紙はどのように扱^{あつか}ってもかまいません。

- ① 3 回の操作を行った場合、紙をひろげたときの折り目の線を書きなさい。
また、折ったときに下から何番目にあった長方形かを、図 1 にならって書きこみなさい。
- ② 4 回の操作を行った場合、折ったときに上から 2 番目にあった長方形は、ひろげたときに左から何番目にある長方形ですか。
- ③ 10 回の操作を行った場合、
(ア) 折ったときに下から 3 番目にあった長方形は左から何番目にある長方形ですか。
(イ) ひろげたときに (ア) の長方形の右隣にある長方形は、折ったときに下から何番目にあった長方形ですか。

—筑波大学附属駒場中学校 過去入試問題—

- ④ 最後に、君の脳細胞をドンドンつなげる【発展問題】をご用意しております。

【解答】

【解答】

私が小学5年生～6年生を指導したときに、最も印象に残った問題の一つです。
言い方を変えれば、指導者泣かせの問題でもあったということなのだと思います。

さすが筑波大附属駒場中学の入試問題と思わせる1題で、問題設定も考える力を養っている小学生なら解けるようになっています。

素晴らしい良問といえばそうなのですが、小学生にとっては、かなり難しい問題なのではないでしょうか。

問題文に「なお、問題用紙はどのように扱ってもかまいません」と書いてあるのは、「問題用紙を使って、実際に折って確かめなさい」ってことを言っているのであろうことは、みんなも分かると思うのですが、それにしてもむずかしいかもしれませんね！（なんせ、あせっちゃう本番入試での作業ですからね。）

多分、問題の指示通りに、問題用紙を折りながら、たいていは下の絵のように頭の中で考えて、マンガで書いてみたのではないのでしょうか？

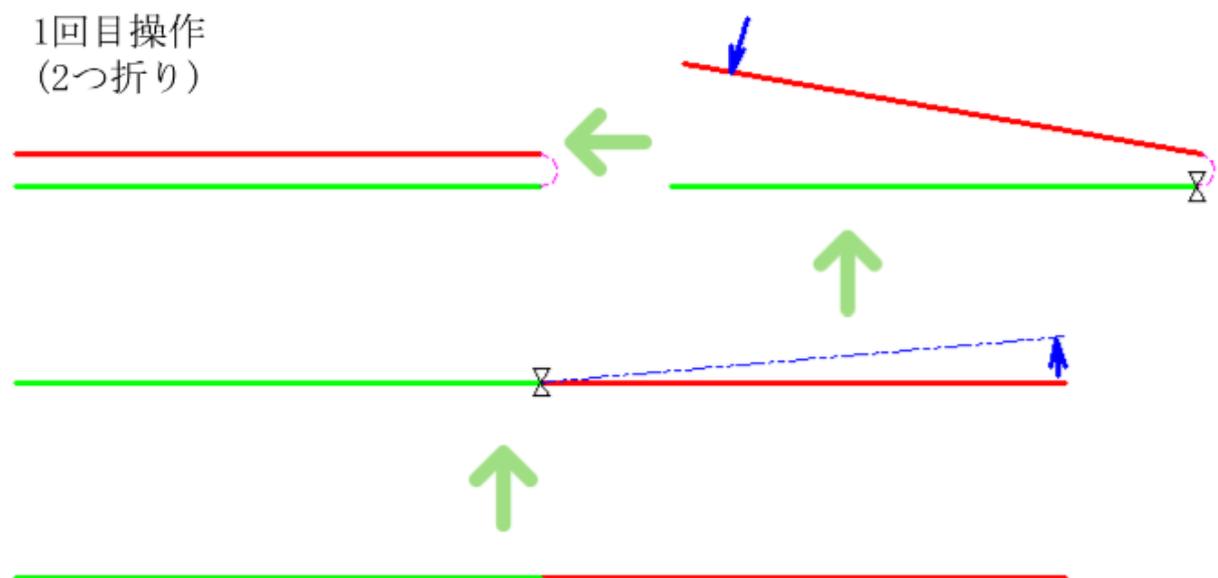
問題用紙を折れば、確かにイメージはつかめますが、それだけでは何をしなければいけないのかが見えてきませんから、的確にマンガ絵にすることができなければなりません。

3回目の操作までを書いてみた子、問題で4回目操作まで問われているから、そこまで書いてみた子。それぞれだと思いますけれど、このように実際に書いてみないと、「どうなっていくの？」がまったく想像もできません。

まずは、「操作」の意味をしっかりと理解しないことには始まりません！！

そのために、マンガ絵を書きながら「何がどうなるのか？」を観察してくわけですね。

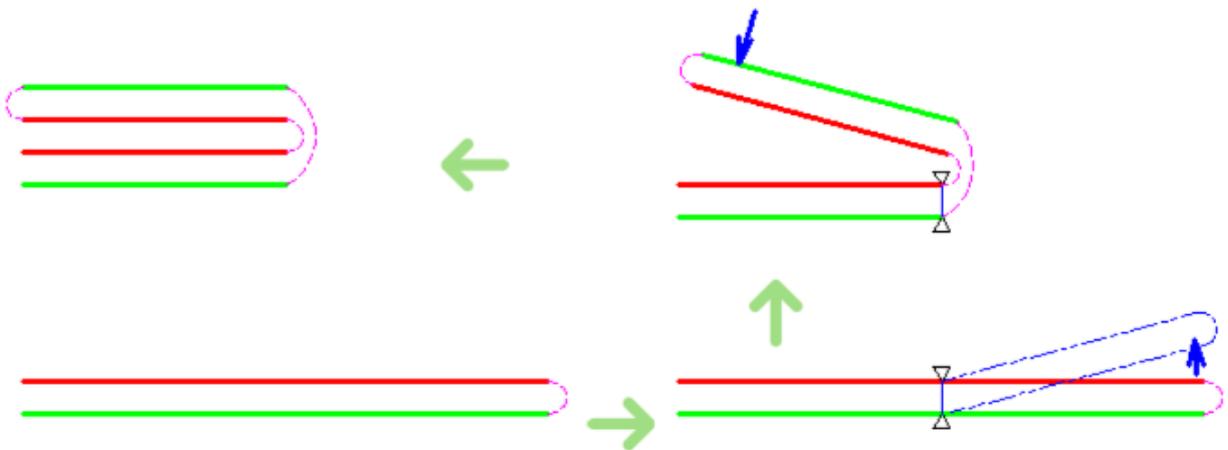
とはいっても、そのままをマンガ絵にしていくだけのことです。



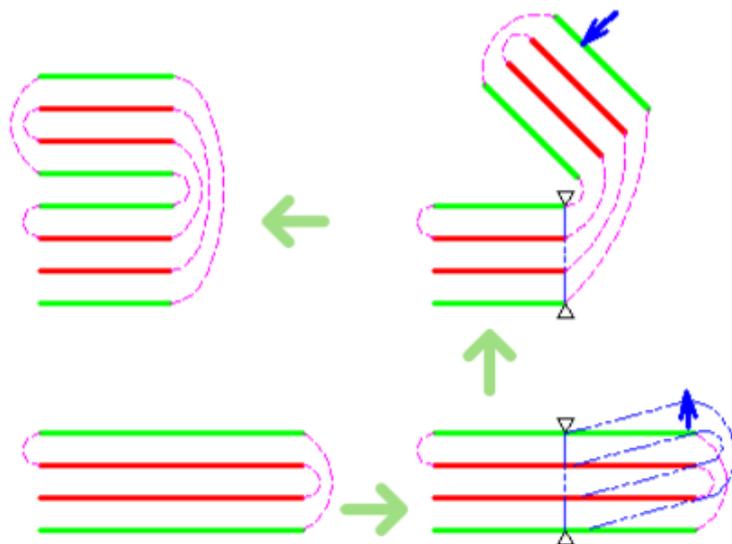
実際にマンガを書くときには色をつけることはできませんが、今回は説明もかねているので、もともとの長い1枚の長方形の左側を緑色、右側を赤色で書いてみました。
(役に立つか立たないかはまだ不明ですし、あなた次第かもしれません！)

上下の関係を見やすくするために間隔をとって表したいので、折り曲げたところは、実際にはつながっていることを表すために、桃色の細い点線曲線でつないでいます。

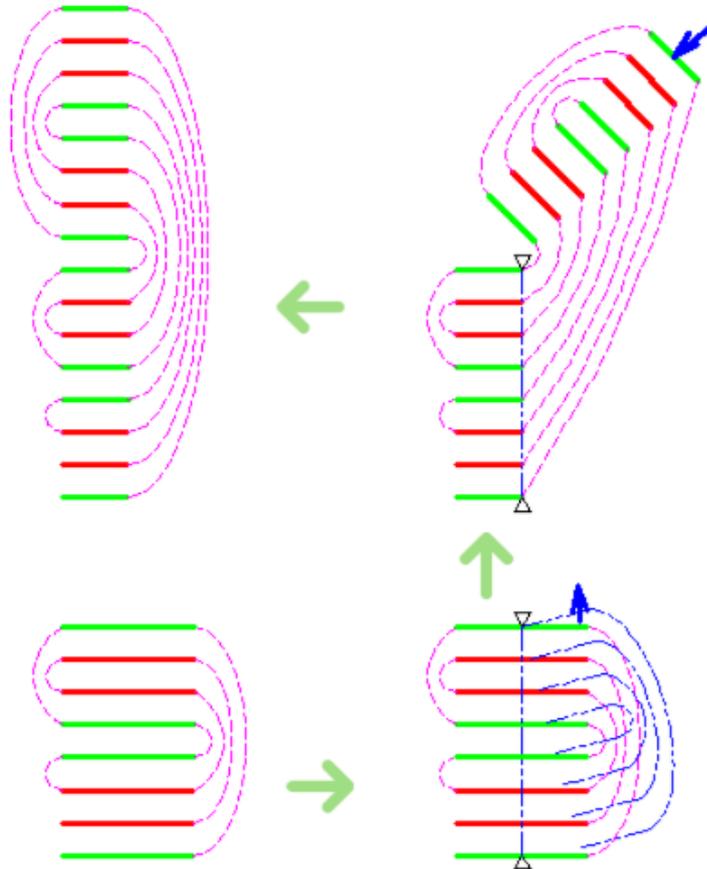
2回目操作 (4つ折り)



3回目操作 (8つ折り)



4回目操作
(16折り)



1回目や2回目までは頭の中で書くことができると思いますが、3回目や4回目になると、頭の中だけでは、ちょっと処理しきれないのが普通だと思います。

それに、考えるべき材料が3つや4つになると、それを比べて何が同じで何が違うのかを見るには、頭の中だけではとても処理できません。

そのような特技を持っていたとしても、頭だけで処理すると絶対に間違いが起こります。

だからこそ、何でも分かったことは書き留めておくのが、問題を正しく解決するための常道です。

当たり前だと思うかもしれませんが、現実には、頭の中で考えているのだから考えていないのだから、とにかくペンが動かない子が多いのです。

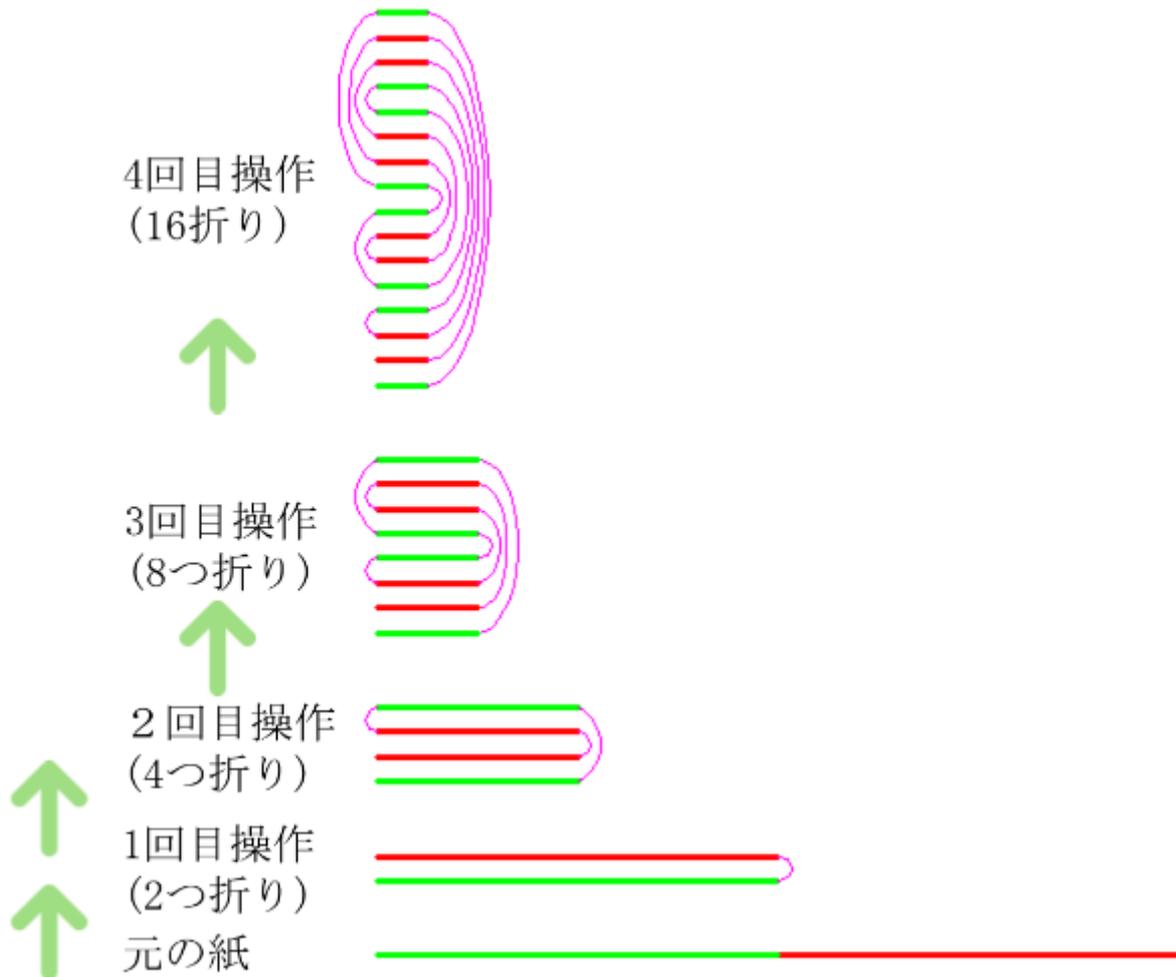
ペンが動かないというよりもペンを動かさないから前に全然進まないと言った方が正しい表現なのだと、私を私は経験上から確信しています。

どうせなら、これらの考えを見比べられるように、下の図のように、順序よく並べて書くことができると、考えるときにも効率的になります。

別に書く順番などは逆でもいいのですよ。人それぞれですから…。

とにかく、順序正しく、規則正しく書くということが大切なのです！！

算数や数学は、「整然」「規則性」が生命線ですから、これを指導してあげてください。



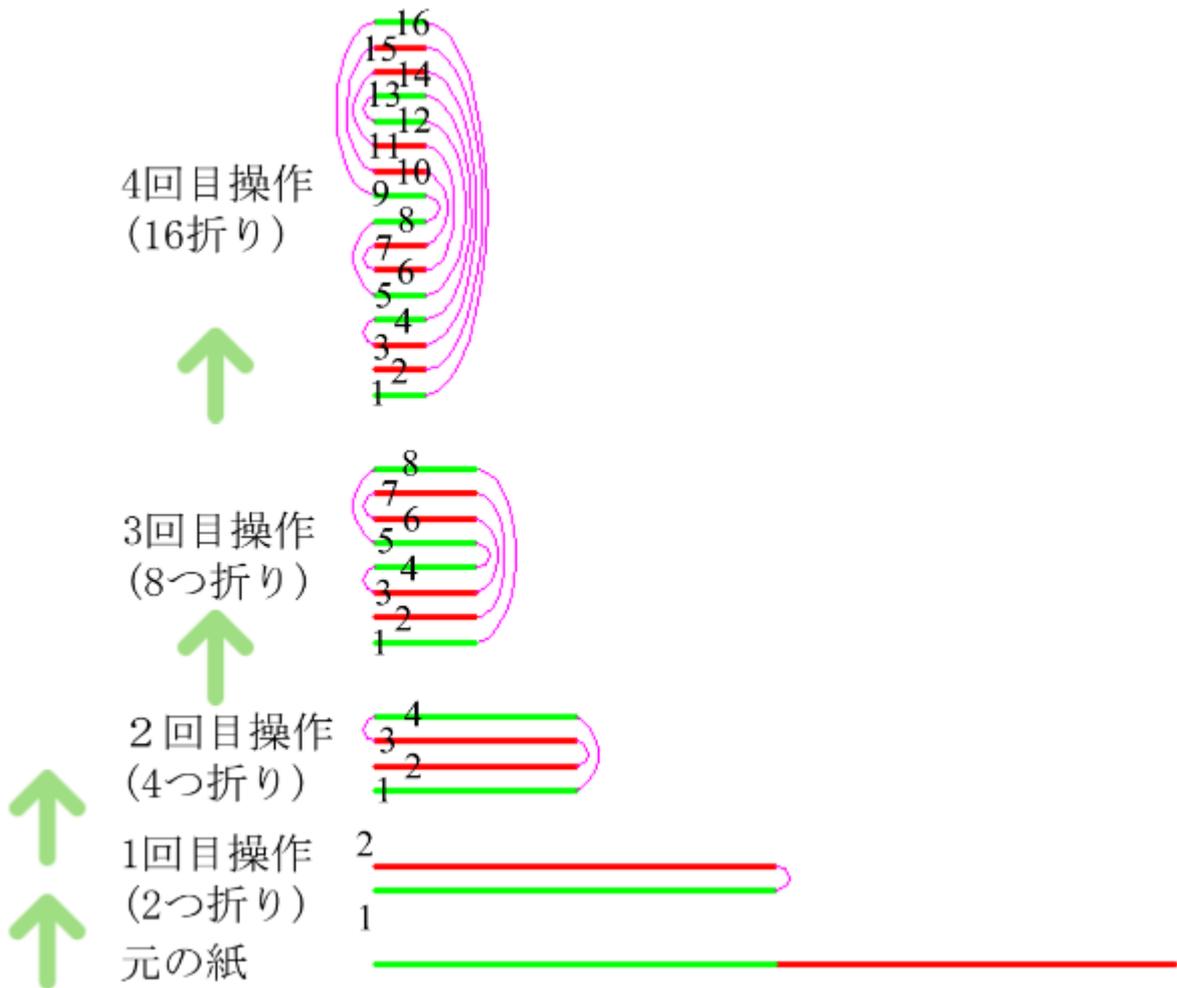
さて、「操作する」という言葉の意味が、この絵を書きながら何となくでも分かれば、次は、「下から何番目にあった長方形か」を表す番号のことを考えなければなりません。

「下から順番に番号をつけていくということとはどういうことなのか？」ということですね。

というか、1つずつの操作をマンガ絵にしていくときには、同時に「つけられる番号はどういうことかな？」と考えながら書いていくと思うのですがどうでしょうか？

問題を一通り読んでからする作業ですから、同時に行われなければなりません。

しかし、問題用紙を折り曲げながら、イメージはつかめたから、次はそれぞれの操作で積まれた長方形を下から順に1からの番号を割り当てればよいと、とりあえず、下の図のように機械的に番号を付けていくとすればどうでしょうか？



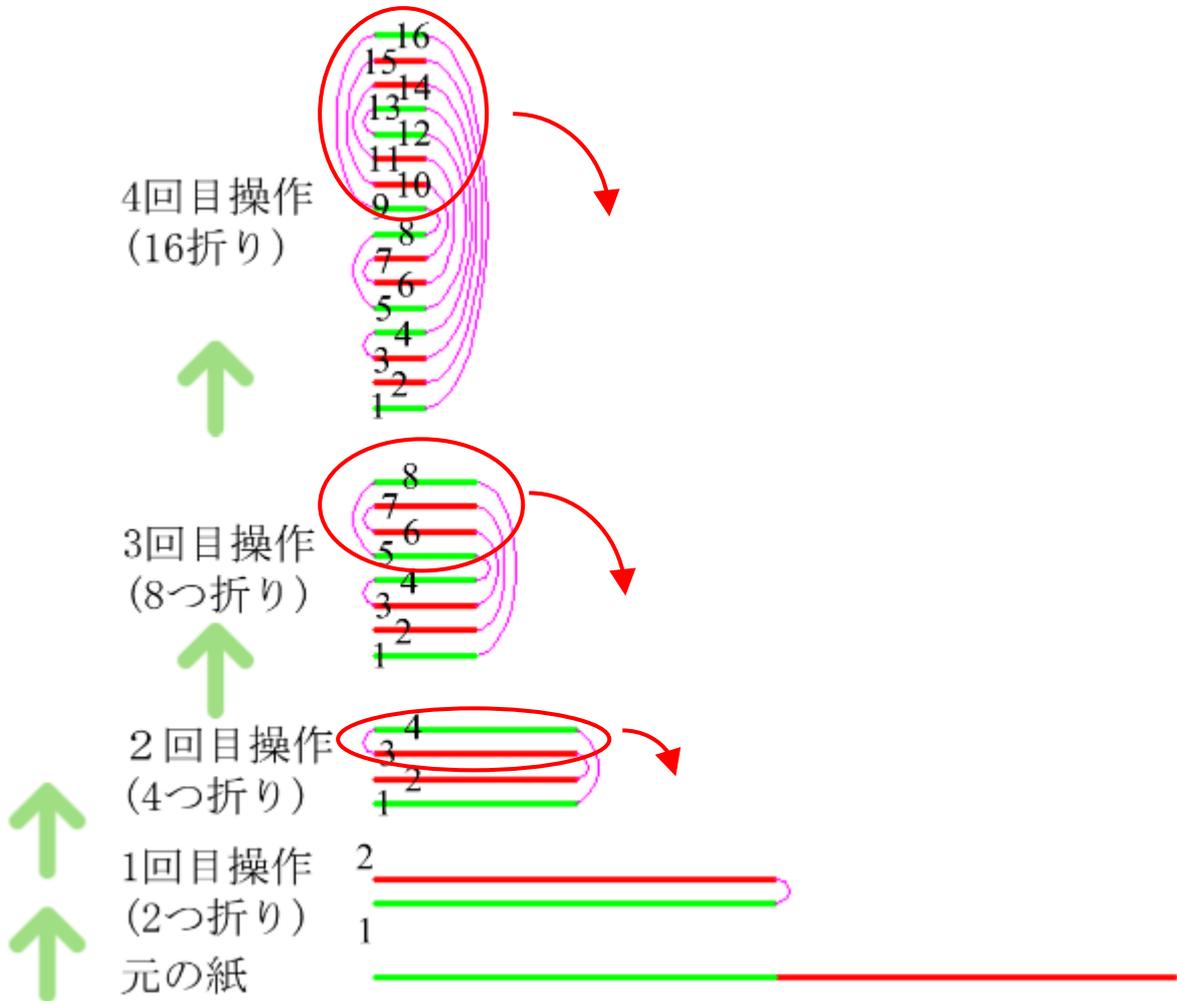
ただ機械的に何も考えずに下から順番に1,2,3,4,...と番号をふつていては、たいていは「これが何なの？」となってしまう兼ねません。

ところが、逆向きに考えることを方法論として持ち合わせている場合は、このようなプロセスを経ても何の問題もないことがあります。

なかなか、そういう鍛錬を積んだ子は少ないものですが...

この「逆手流」を持ち合わせている子は、3回か4回の操作の結果を表したマンガ絵だけからでも、操作を逆戻して考えてみようということを思いつくのです。

それは、どういうことかと言いますと、「逆手流」を持ち合わせている子は、機械的に前ページのマンガ絵を書いたとしても、下の図のように操作を逆戻しにすることを試みるということなのです。何故なら、下の図で  を折り戻される1つのユニットとして考えることに気が付くからです。



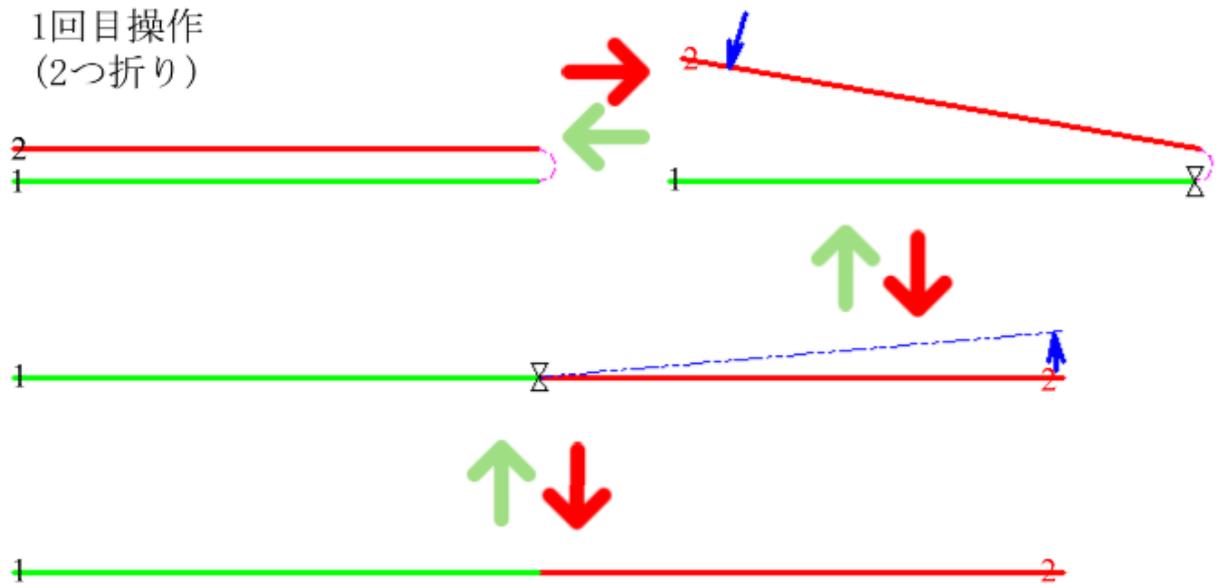
これは、1つずつの操作をマンガ絵にしていくときに、同時に「つけられる番号はどういうことかな？」と考えながら書いていく、いわゆる「順方向」の素直なプロセスと結果的には同じこととなります。

ですから、一概に言えることではないのですが、まずは、ただ機械的に何も考えずに下から順番に1,2,3,4,...と番号をふってはいけないということを基本にしてください。

「この番号は、どの部分がどの番号になっているのか？」を観察しながら番号をふるというプロセスを大切にすることが何ととっても基本なのです。

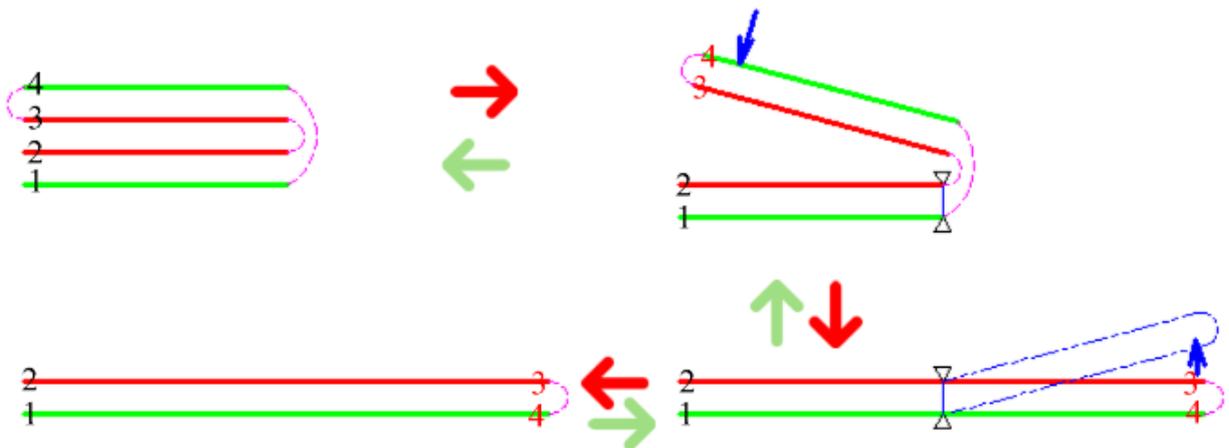
「逆手流」を知っている子が、上の図で  を折り返される1つのユニットとして考えることに気が付くのは、マンガ絵を書いていく途中でプロセスをしっかり考えていくからとも考えられるのです。

それでは、次に最初に示したように「順方向」の素直なプロセスで、且つ、同時に、つけられる番号を入れながらマンガ絵を書いていくことにしましょう。（緑色の→が「順方向」）



1回目の操作で上にきた2番の長方形は、もともと右側にあった半分が折られてできたものですよね。操作を終えた状態の絵から、赤い矢印の向きに逆に折り戻してみると、2番の番号は、もともとの1枚の長方形の右端だったということが分かります。

2回目操作 (4つ折り)



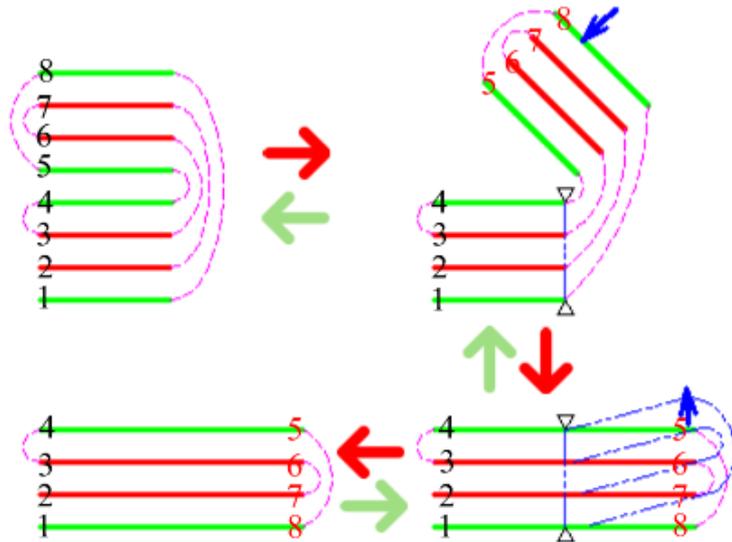
1回目の操作で2つ折りになったものを、さらに真ん中で折り曲げることになり、4枚が積み重なるような形になりましたね。

やはり下から順番に、1,2,3,4と長方形の左端に番号を書いてあげて、同じように赤い矢印の方向に折り戻していくと、3番の番号はもともと2番だった長方形の右端、4番の番号はもともと1番だった長方形の右端だったということが分かります。

「番号は折り曲げられたときの長方形の左端に書く」と書かれていましたね。
正確に言えば「左端に極力近いところに書く」ということなのですが、この書き方のルールがベストであることに、もう気が付かれたでしょうか？

そのわけは追々分かってきますから、最後まで根気よく読んでください。

3回目操作 (8つ折り)



2回目の操作で4つ折りになったものを、さらに真ん中で折り曲げることになり、8枚が積み重なるような形になりましたね。

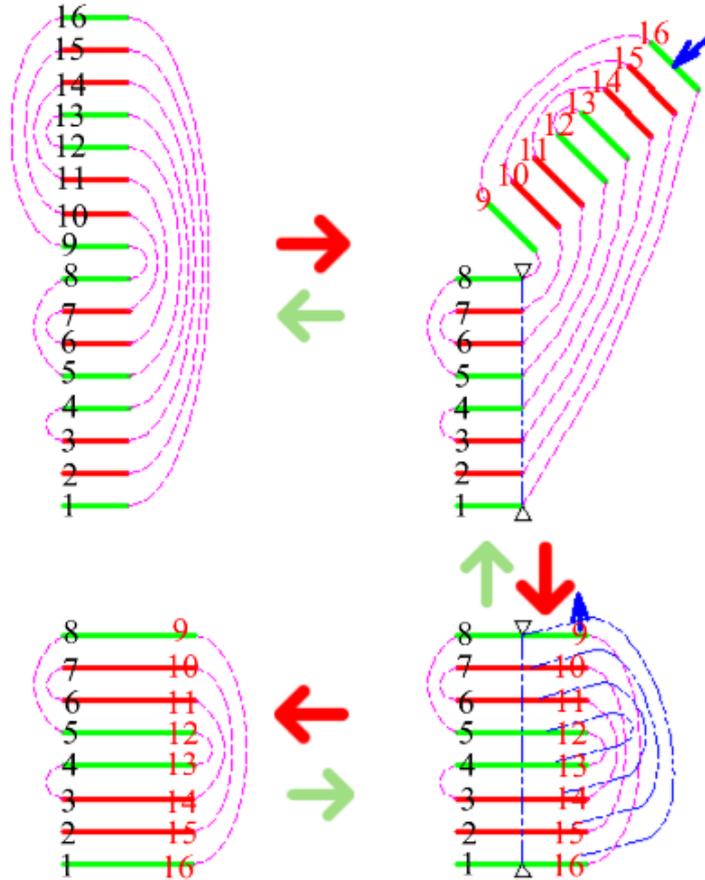
やはり下から順番に、1,2,3,4,5,6,7,8 と左端に番号を書いてあげて、同じように赤い矢印の方向に折り戻していくと、5番の番号はもともと4番だった長方形の右端、6番の番号はもともと3番だった長方形の右端、7番の番号はもともと2番だった長方形の右端、8番の番号はもともと1番だった長方形の右端だったということが分かります。

3回目の操作までくれば、かなりイメージがつかめてきたのではないのでしょうか？

ちょうど真ん中で右端から折り曲げるということは、右端が新しい左端になって、新しい番号をもらうのだということに、そろそろ気づいてほしいですね。

では、問題で問われている4回目の操作まであと1回だけですから、そこまではマンガ絵にしておきましょう。

4回目操作
(16折り)



4回目の操作も同じように考えていきます。

番号を折られたときの左端に書いておくという意味が少しわかってきましたか？

もし、折られたときの右側や右端に番号を書いておくと、次の操作で折られて、もう一つ上の方に移動してしまいますから、その場所の番号は変わってきてしまうのですね。

例えば、上の4回目の操作をする前（3回目の操作が終わった状態：下側左図）で、下から8番目の長方形の右側や右端に8と書いておいていたとすれば、次の操作をしてしまうと、そこは折り曲げられて下から9番目になってしまう部分になりますから、正しくないことになってしまいますよね。そうすると、8番を9番に変えなければならず、8番はどこかに消え去ってしまいますからね。

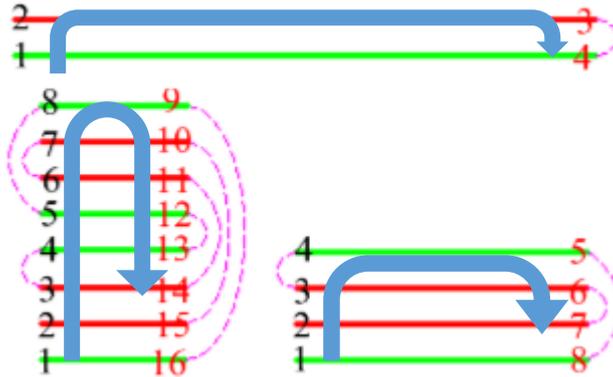
ところが、左端に8と書いておけば、そこは折り曲げられずに、その場所から動きませんから、下から8番目のままで正しいということになります。

要するに、折り曲げられる前の右側・右端は、常に次の操作で場所を変えるということです。右から左へ折るということから、当たり前と言えれば当たり前のことだと気づきます！

さて、ここまでまとめてくると、さすがに、折る操作が終わったときの右端に、次に折る操作を始める前に下の図のように逆 U 字型のルールで番号（赤数字）を決めておいてやれば、その番号が、次の操作をしたときの、その場所の番号になることに気づくことになります。

これは、必ず、折る前の右端が、折れた後に左端に来て、しかも右端の上下関係は逆になるということが理由だということでしたね。

理解し切れませんでしたでしょうか？



さて、逆 U 字型のルールで番号が決まるといっても、3 回や 4 回の操作なら書いてやれば決められますが、操作回数が増えていくと、書いて数えるなどということも難しくなります。

ところが賢明な子は「左端の番号と右端の番号をたした数は、どの長方形でも同じになる」という規則を見破っています。

例えば、3 回目操作のあと、4 回目操作で決まる番号を決めようとする場合、一番下の長方形の左端 1 に対して、右端は $8 \times 2 = 16$ が来ることと同時に、どの長方形も左端と右端を足した数は $1 + 16 = 17$ になると見抜いていますから、左端 6 に対しての右端には 11 が来ることが瞬時に分かるのですね。

これは、「1 から 10 までの和を求めなさい」を求めるときに、「10 から 1 までの和」と同じだから、

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
+	10,	9,	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1
	11,	11,	11,	11,	11,	11,	11,	11,	11,	11

と並べて、 $(1+10) \times 10 \div 2 = 55$

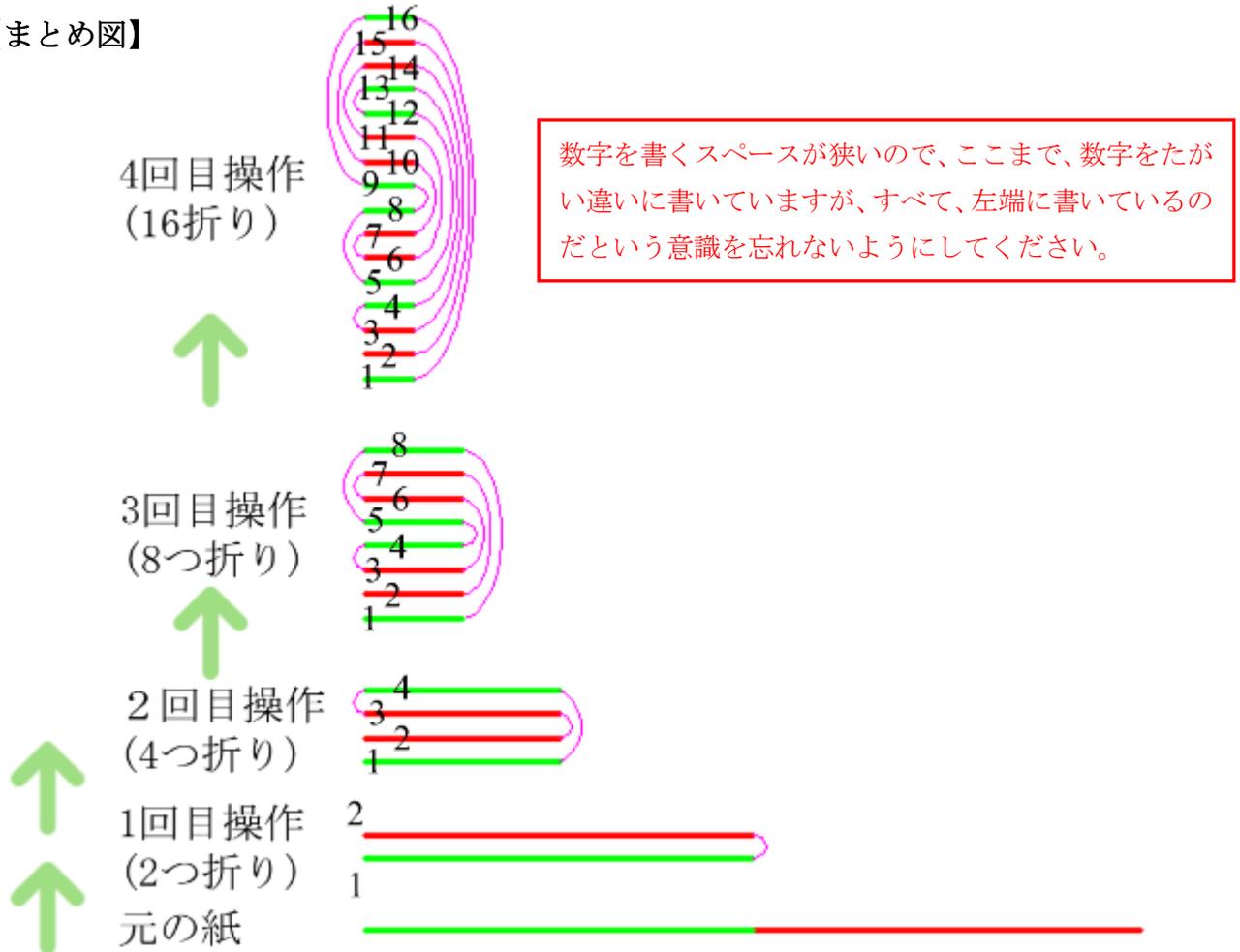
であるとズルして計算できることを理解できているならば、見破ることができるものです。

パターンとして覚えることと、自分でパターンとして認識することとは少し違います。

前者の場合は、見破れない場合も出てくるかもしれませんが、意味をしっかりと指導してください。

結果だけをまとめてしまうと下の図のようになりますが、ここまでの順方向の思考プロセスを大切にすることが大切です。

【まとめ図】



実際の操作は、これでマンガ絵にできましたが、問題では長方形をひろげたときの番号の並びを問われていますから、こちらも実際の操作と対応させながら考えておかなければなりませんね。

ひろげたときの、折り目の線に関しては、まず、

- 1回操作をすれば2分割されるから、折り目は真ん中の1本
- 2回操作をすれば2分割されたものが、さらに2分割されるから4分割され、折り目は4等分するための3本。
- 3回操作をすれば4分割されたものが、さらに2分割されるから8分割され、折り目は8等分するための7本。

ということぐらいは同時に日本語として呟いておくようにしておく方がいいですね。