1

空間問題を捨てない超初歩

精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~

一 帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一

はじめに

空間座標だとか空間ベクトルの問題だと分かると、途端に拒絶反応を起こしてしまう諸君も多い のではないでしょうか?

もう、「空間問題は捨てちゃお!」って決めている子も多いかもしれませんね。

はたして、たいていの諸君は空間・立体は苦手のようです。

それというのも、平面図形なら紙に書けば見たまま以上の情報は必要なく理解が出来ますがが、 空間図形は見たままだけではイメージできない、理解できないという特殊な事情があります。

見たままでは理解できないものをイメージとして理解するための何らかの橋渡しが必要なのです。 ですから、君が空間や立体が嫌いだという理由には、ひとえに「頭の中でイメージするのが難しい。」ということが根底にあることは間違いないことでしょう。

誰に聞いても、「イメージができない」という声が返ってきますからね。

紙の上に空間図形や立体図を指し示されたとすれば、頭の中でこれを**空間図形に変換する眼鏡を通して**イメージを掴まないことには意味が理解できません。

その変換する眼鏡を自分なりに作り上げておかねばなりません

このことが、空間・立体を分かるための絶対条件としてあります。

それは、「空間認識能力」などと呼ばれ、確かに天分の要素があることも確かでしょうが、誰でも 訓練すればある程度の能力を身に付けることはできるのです。

ここまでは誰にも平等な条件なのです。

眼鏡を作り上げる作業をするかしないかで、チンプンカンプンのままで終わるか、少なくとも手が付けられるレベルになるかが決まります。

御多分に洩れず、一朝一夕に出来上がるものではありませんが、幾つかの実際例で丹念に確認しながら作っていくしかありません。

空間や立体を理解できるようになる方法は、

- 1. いろいろな空間図形を実際に模型を作って、眺めるポジションを変えて確かめる
- 2. 問題を利用して、実際に空間図を描く訓練をして慣れる
- 3. 展開図であれば、実際に作ってみて立体を作る様子を観察する

結局は、こういった方法しかありません。

精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~

一 帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一

空間座標や空間ベクトルの問題は、ともかくも空間を紙の上に表現する、即ち空間図形を描くという作業から始まりますが、ここで躓くとイメージで掴むことからして大変難しくなり、問題に手さえ付けられずに終わるのです。

この中でも、絶対に必要な訓練は、【2.問題を利用して、実際に空間図を描く訓練をする】ということです。

空間図を描いてイメージが掴めるのであれば、わざわざ模型を作って確かめる作業は絶対に必要 ということではありません。

ただ、事務的に空間図を描いてはみたものの意味が掴めない場合などには、模型を作って、何故 そのように描けばいいのかなどを確かめることは大いに理解に近づく有効な手段となります。

2 次元しか表現できない紙の上に 3 次元を表現しなければならないのですが、普通はフリーハンドで描く見取り図と呼ばれるものですから、それほど難しいことではありません。 即ち、それほど厳密に考えて描かねばならないものでもありませんから、気楽に構えてください。

紙は二次元の平面をありのままの姿で投影することができます。

しかし、空間的な対象は、その空間上のどこかにカメラを置いて、そこから撮影したそのままの 写真を紙の上に表現するしかありませんから、実際の長さ通りには見えません。

カメラの位置は「空間上のどこか」即ち、無数に存在するポジションが選べますから、どこでもいい訳ですが、対象を一番よくイメージできる位置からの眺めが最も分かりやすいのは当然です。

まず、立体としてのイメージに変換しやすい眼鏡として、斜め上方から見た見取り図にすることです。

座標軸を基準に描く空間の書き方は自由ですけれど、問題に応じて理解しやすいポジションから 見た図にすることがベストです。

と言われてもそれだけでは分かりませんし、迷いますよね。 通常は3種類ぐらいの書き方があります。

その話を進める前に、一つの問題を素材にして考えいくのが実践的ですので、まず問題をご提示 しておきましょう。

精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~

一 帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一

素材にする問題

【素材問題】

xyz空間において、原点Oを中心とする半径 1 の球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 、およびS上の点A(0,0,1)を考える。

S上のAと異なる点 $P(x_0,y_0,z_0)$ に対して、2点A,Pを通る直線とxy平面の交点をQとする。

- 1) $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ (t は実数)とおくとき、 \overrightarrow{OQ} をt, \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OA} を用いて表せ。
- 2) \overrightarrow{OQ} の成分表示を x_0, y_0, z_0 を用いて表せ。
- 3) 球面 S と平面 $y = \frac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。 点 P が C 上を動くとき、 xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。

問題としては、標準問題の上クラスの問題ですが、設問が難しいなんて今は考えないでください。

難しいと思う前に、まず空間図形を描かねばお話になりませんから、その上ではとても役に立つ 問題です。

さて、小問を解くにも、まずは見取り図を描かねば始まりませんが、理想的には、まず問題部分を読みながら次のステップで実際に描くような見取り図を頭の中でイメージとして作っていけることです。

精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~

一 帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一

模型を作ってみる

模型を作って、問題と照らし合わせてみることはよい訓練になります。



写真1:右斜め上方にカメラを置くとこのように見えます

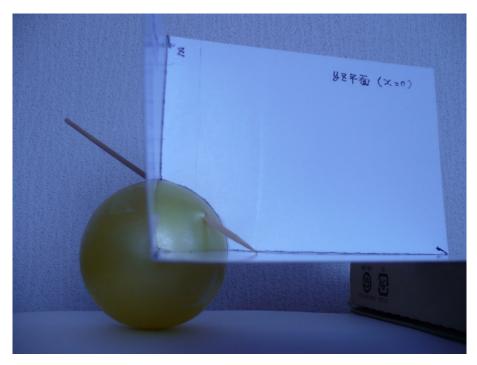
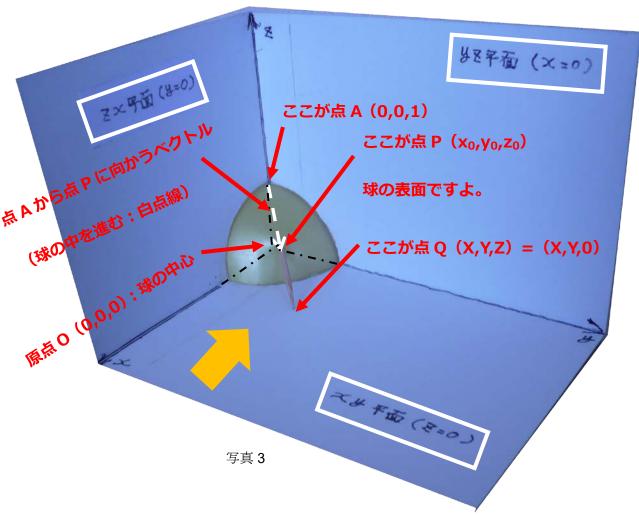


写真 2: yz 平面の真正面から z=0 の高さにカメラを置くとこのように見えます

精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~ 一帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一

意味を理解するために、写真にもコメントを入れながらステップを見ていきましょう。



点 A の座標は(0,0,1)ですから、原点 O(0,0,0) から z 方向に 1 だけ進んだ点ですね。 すなわち、球の天頂(てっぺん)ですね。

点Pは、この球の表面上の任意の点(球の表面上であればどこでも可)であり、特定することはできませんから問題のように (x_0, y_0, z_0) としてあります。

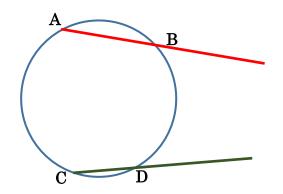
点 Aから点Pに直線をとると、この直線は球の中にできますね。

(ボールの表面に点を2つ付けて、その点を直線で結ぶとその直線は球の中にもぐりますね。) 竹串を点Aから刺して、再び点Pから出て来るイメージです。

今回は写真で見える範囲(1/8 球)の球上に点P をとって点A から点P に出て来るように竹串を刺しています。(写真2 でよく分かるのではないでしょうか?)

精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~

一 帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一



球面上にあるどのような2点も直線で結べば、その直線は必ず球の内部にある。

そして、その直線をどちら側に延長しても、それは必ず円の外部である。

写真3では、白い点線で竹串が球の中に隠れていることを表しました。 点Pで竹串は再び姿を現し、その後、xy平面(z=0)に突き刺さって行きます。 この突き刺さるポイントが点Oだということですね。

点Aから突き刺さった竹串は右へ進みながら(y軸のプラス方向)手前にも進み(x軸のプラス方向)、且つ、下に下がる(z軸のマイナス方向)方向に進んでいきます。

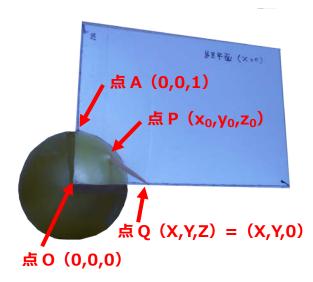


の方から見ると(写真2のアングル)下の写真のように見えます。

柔らかい段ボール模型のため、少し歪んで完全に 直角にならないのでやや斜視で撮っています。

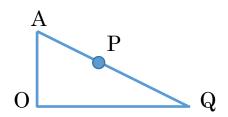
これらのことを頭の中でイメージできれば、図を描くのもおちゃのこさいさいですね。

でも、イメージができなくても、次のステップで お話する要領で見取り図としての空間図を描く 訓練をしていかれれば、必ず見取り図を描く前に 頭でイメージを描けるようになってきますよ。



さて、 $\triangle A$ と $\triangle Q$ は竹串の両端、 $\triangle P$ は竹串の途中にある点として考えてみましょう。 原点Oと $\triangle A$ 、原点Oと点Qをそれぞれ結べば、同じ平面上に三角形ができます。 (3 つの点が存在する平面はただの一つしかありません。)

右の図のようになりますね。 分かりますか?



精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~ 一 帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一

空間図(見取り図)の書き方

通常は、次の3種類の見取り図をよく使います。

① 今回の模型の写真 1 のポジションから見た見取図 (野球で言えばライト側外野席から見る感じ) x,y,z全てのプラス側領域が丸見えになります。 教科書はじめ最も多く使われているのがこのタイプです。

ただ、例えば

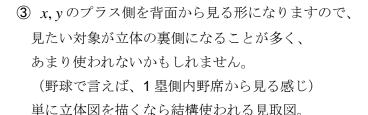
こちらに向かって(x軸とy軸成分が同じぐらい)で 進んでくるようなベクトルは表現しづらくなります。

② 今回の解答説明(後述)で私が描いた図のポジションでの見取図。

(甲子園で言えば1塁側アルプスから見る感じ)

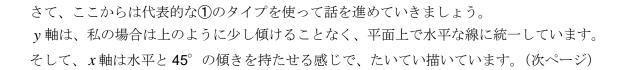
例えば

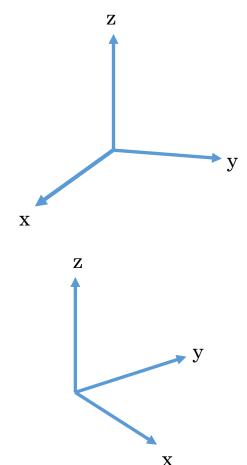
上記の例x軸とy軸成分が同じぐらいで進んでくるようなベクトルは、この図ではこちらに向かって来ませんので表現はしやすくなります。





z y





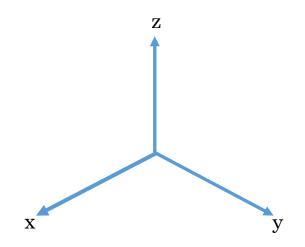
精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~ 一 帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一

①と近いアングルでは、センターど真ん中で 45 度斜め上方から見下ろすタイプの見取り図もよく使われます。

x軸とy軸はz軸に対して約 **135**° をなす角度の感覚で対称に引かれると、このポジションにカメラを据えたイメージになります。

これは、x, y, z全ての成分を均等に見渡せるポジションですので、長さも全て同じ目盛で考えていけばいいですから作業もしやすくなります。

但し、ホームベースから 2 塁、センターに向かって来るような出来事は表現しづらくなります。 例えば、バックスクリーンへ打ち込まれたホームランの軌跡を見たい場合でも、1 本の直線でし か表現されませんから綺麗な弾道を見たい人には満足してもらえません。



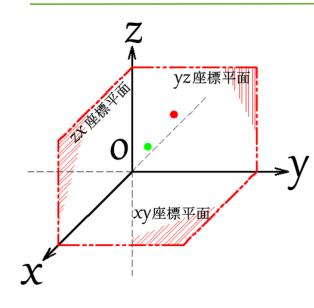
「嗚呼!①で描いた方がよかったな」「やっぱり②で描いた方がよかったな」とか後悔することはしょっちゅうですけど、フリーハンドで描くんですからすぐに描き直せばいいんです。

ともかくも、まず描くことに慣れることが先決です。

イメージが掴めない原因は、とにかく見取り図を描く訓練をしないことが第一要因です。 だれも、「しもうた!」の失敗の繰り返しで少しずつ感覚を掴んでいくんです。

精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~

一 帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一



空間を考える場合は、まず左図のように、 3つの座標軸及び2つの座標軸で作る座標平面 を意識してください。

座標軸は通常、z軸を上下方向にとります。 x軸と y軸はこの順番に反時計回りにとるの が原則です。 (2次元のxy座標と統一)

xy座標平面 (z = 0)・yz座標平面 (x = 0)・zx座標平面 (y = 0) はそれぞれ図のようなイメージになります。(ハッチングした平面)立体的にこの平面を見ることができますか?

さて、ここに空間的な見取り図を表現していくわけですが、<mark>見取り図に数学的な正確性や数値的な正確性はありません。</mark>

実際に模型を作られて(何かの箱の 4 つのサイド面の内隣り合う 2 つのサイド面をカッターで切り落とせば上のように座標面を壁とした模型がすぐできます。)、いろんな方向から眺めてみると分かると思うのですが、上の図のように見えることはありません。

即ち、空間図形を正確に表現したものではないということだけは頭に入れておかれて下さい。 あくまでも、空間のイメージを掴むための手法なのです。

座標平面はわざわざ描く必要はありませんが、この平面を基準にしてイメージを掴んでいきます ので、常に意識しておいてください。

さて、xyz 空間上に赤い点と緑の点があります。

この図を見てそれぞれが空間に浮かんでいる点としてイメージできますか?

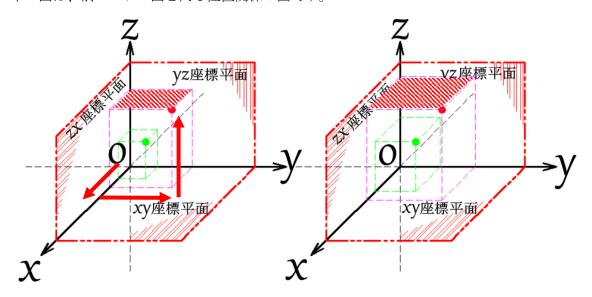
「理解できるよ!」なんて答えた子は、天才でも何でもありません。 嘘つきかペテン師って思われます。

空間に浮かんでいる点としてイメージなどできる筈がありません。

だって、空間上では上の図のように描ける点はいくらでも存在するからです。 そのことは、次の図を見ていただければ理解できるのではないでしょうか?

精密自動機械設計のプロが教える見取り図の書き方~イメージできる力を育む~ 一帝都大学へのビジョン 数学への導火線教材 一

下の図は、前ページの図と同じ位置関係の図です。



これを見てどうですか? 空間的な位置のイメージが掴めましたか?

そうですね、点線で描いた補助線で何となく立体感が出ましたね。 赤い点で言えば、原点Oからx方向にaだけ進んで、y方向にbだけ進んで、さらにz方向にcだけ上がった点として捉えることができます。

ここで、左右の図を比べてください。

赤い点も緑の点も図としては同じ場所に書かれていますが、右の図は左の図よりも、進む a,b,c が大きかった(原点Oからより離れた)ところにある点として捉えることができます。

ですから、点だけ見せられても、私にはさっぱり分からなかったのですが、この補助線があると、立体停な位置がイメージできました。

実際には、直方体となる補助線を全部描いていってもいいですし、直方体の天面の平行四辺形だけを上図の左図の赤点の場合のように でハッチングしておくだけでもイメージが分かります。

部は、「この平面上にある点だよ」ということを示す「補助面」ということができ、 これを描いてくと、非常に分かりやすいので空間図ではよく使われます。

x座標,y座標がこういうところにある点だよということが、補助線あるいは補助面を使うことでイメージしやすくなりましたね。