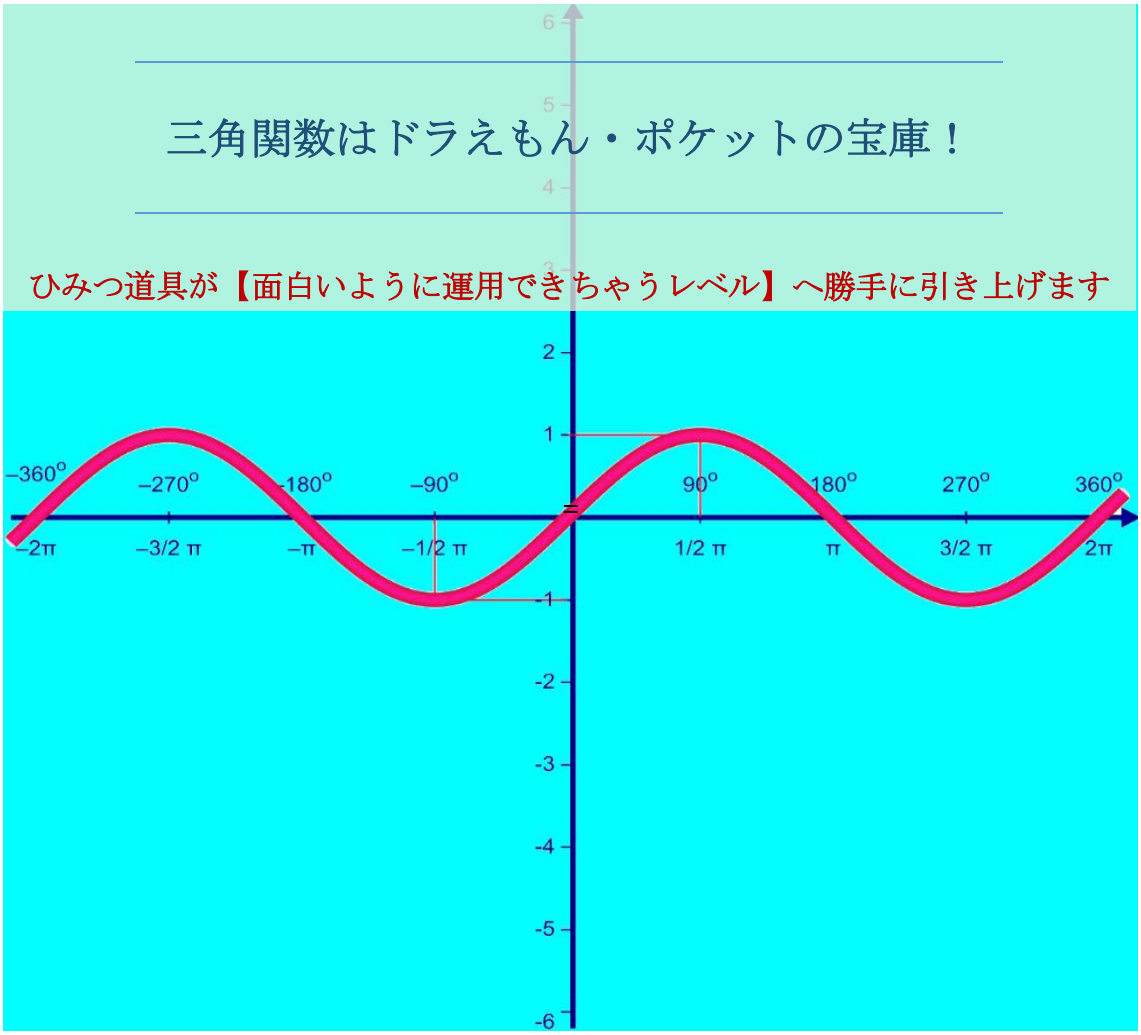
三角関数　はじめの一歩

ー感動！ガリレオ流 帝都大学への数学　vol.2ー



三角関数はいたって公式が多いように見えますが、ほとんどは枝葉です。

公式の丸暗記に神経を使っているようでは、数学ができない子だと看破されます。
実は、覚えておかねば面倒だというような基本公式は数えるほどもありません。

母なる『加法定理』だけ理解し、頭の中に単位円と三角定規だけを用意してください。
公式をイメージと関連付けておけば君の脳にドラえもん・ポケットは完成します！

==========

発行日：2009 年 5 月 30 日

著者：二三五　八十三（フミコ　ハトミ）
発行元：「帝都大学へのビジョン」事務局
https://e-littlefield.com/teito-vision/
teito-vision@e-littlefield.com

==========

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

著作権について

「帝都大学へのビジョン」及び付属著作物全て（以下、本書と表記します）は、
著作権法により保護されています。
本書の取り扱いについては、以下の点にご注意ください。

本書の著作権は、「帝都大学へのビジョン」事務局にあります。
また、本書を購入された本人及びご家族のみが読む事を許され、
購入者本人のみが内容を元に活用出来るものとします。
（購入者本人が保護者の場合はお子様が活用できるものとします。）

許可なく無断で、本書の一部、または全部を複製及び転載することを一切禁じます。

コピー、ビデオや電子メディア、メール、メルマガなどでの複製、転載、転売
およびインターネット上で公開する事を禁止します。
またインターネット上で転売（オークションなどを含みます）することも禁止します。

万一上記の禁止行為を発見した場合は、日本国の法律に従い解決をいたします。
上記規定に違反した場合、違約件数×違約発見時の本書の販売価格と
法律に従い適正な賠償額を請求いたします。
上記規定の禁止行為を発見された方は、直ちに連絡頂ければ幸いです。

【免責事項】
本書は、著者のこれまでの指導実績と理念を元にまとめあげられたものであり、
また、多くの中高生の成績アップを願ってつくられたものですが、
全ての読者の利益を保証するものではありません。
本書により、いかなる損害が発生しましても一切の責任を負いません。
すべては自己責任で行われることとします。

本書をご購入していただきました方に、このようなことをお伝えするのは
心苦しいことなのですが、法律上の必要記載事項ですので、ご理解の程お願いいたします。

本書を開封した時点で、購入者は、これに同意したものとします。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

目　　次

序章：三角関数　～公式に神経を使わないようにする～　4～

第 1 章：三角関数の意味・概念をイメージで焼き付ける　7～

第 2 章：公式に神経を使わない一歩　17～

第 3 章：三角関数の母なる「加法定理」を知る　24～

第 4 章：三角関数の合成を逆向きに考える　31～

第 5 章：倍角の公式・3 倍角の公式・逆倍角の公式（半角の公式）　35～

第 6 章：積⇔和の公式は「加法定理」から　42～

第 7 章：正弦定理・余弦定理・面積をイメージで捉える　44～

第 8 章：三角関数のグラフ　70～

第 9 章：$\sqrt{}$ の覚え方と計算の理屈（開平法）　76～

第 10 章：運用問題 8 題　78～

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：三角関数　～公式に神経を使わないようにする～

三角関数の問題に関しては、とにかく公式が多いというイメージがあるね。
確かに、参考書にはズラリと公式が並んでいる。

でも、「公式が多すぎて覚えられない」とか、「公式が分からない」とか言っている状態だけは、まず脱しなければみんなの数学の未来はないと思うよ。
公式にばかり神経が行っている間は、全然お話にならない程ダメな状態なのね。

「そんなこと言っても・・・」と思うかもしれないから、最初に言っておこう。

> 三角関数で、覚えておかなければどうにもならない公式は、
> 「加法定理」と「正弦定理」と「余弦定理」だけね。
> その他のものは、上の 3 つから、ほとんどその場で出てくる。
> あと、面積では「ヘロンの公式」は覚えておかねばならない。

公式を忘れても、バックアップできるかできないか。
はっきり言うよ！
できる子とできない子の差の根っこは、ここにあると言って 100%間違いない。

「公式　覚えてる？」
「公式を覚えられる人はいいなぁ！」
なんて言葉を発しているようでは、
誤解どころか 6 階以上のお門違い（おかどちがい）もいいところね。

できる子は、たくさん問題に当たっているだろうし、
だから公式もリズム感では確かに覚えてるよ。
でも、「たとえ、度忘れしても平気の平左」という余裕があるから、
そんなことには頓着してないのね。
覚えているから「できる」ということは絶対にないのだね。

ここで、理想を言っておくね。
- 根幹の公式は覚えている。（理屈も分かっている。）
- その他の公式はトレーニングの結果、ほぼ覚えている。
- どちらの公式も、度忘れしても導ける。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：三角関数　～公式に神経を使わないようにする～

この理想状態に持ち込めれば、
・公式を覚えているので、たとえ１分でも本筋に時間を費やすことができる。
・トレーニングを積んでいるので、間違えてる場合、違和感を感じて見直す。
・度忘れしても、公式を導くことができるので、ルートを外れたまま
　進み続けるようなことはない。

これに比して、数学の成績の伸びない子の典型パターンは、
・公式を丸暗記しているため、理屈が分からない。
　形やパターンが少し変わるだけでもお手上げ。
・トレーニングを積んでいないので、運用術が分からない。
・度忘れすれば、公式を導くことができないので、そこから一歩も進めない。

三角関数は、理系の人なら実際の仕事上で使う機会が最も多いものです。

昔、高石ともやさんの「受験生ブルース」に「サイン・コサインなんになる？」というフレーズがありましたが、確かに実際文系に進む人は一生使うことは無いかもしれません。
しかし、理系に進む人には、単純な計算としては日常的にある程度使わなければならないものです。
ある意味では、現代文明を支えている数学の最たるものです。

建築・機械：　長さや面積・体積ならCADが勝手にやってくれますが、
　強度設計などでモデル化出来ないものは必須ですね。
電気・電子：　我々の生活は100Ｖの交流に支えられているわけです。
　電波も振動です。
　そんなときはsin、cosのお化けになりますよ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：三角関数　～公式に神経を使わないようにする～

では、この講座の大きな流れを最初に説明しておくね。

ステップ 1
三角関数の概念・定義をイメージで焼き付ける。

ステップ 2
三角関数の概念・定義の範囲での常識を頭に叩き込む。
三角関数の概念・定義の範囲での cos , sin , tan の変換を暗記ではなく、体に沁み込ませる。

ステップ 3
三角関数の母なる「加法定理」の概念を図とともに理解する。
公式は完璧に覚え、度忘れしても導けるようにしておくこと必須。

ステップ 4
三角関数の合成の概念を「加法定理」から逆向きに理解する。
実際の問題への運用で行き詰った際には読み直す。

ステップ 5
倍角・3 倍角・半角のそれぞれの公式は「加法定理」から即座に導けるようにする。
公式はリズム感で覚え、実際の問題への運用で行き詰った際には読み直す。

ステップ 6
和 ⇔ 積の変換公式は、「加法定理」から即座に導けるようにする。
公式はリズム感で覚え、実際の問題への運用で行き詰った際には読み直す。

ステップ 7
正弦定理と余弦定理は幾何学的なイメージとともに概念をしっかり掴む。
正弦定理 ⇔ 余弦定理間の代数的な行き来を一通り読解しておくこと。
公式は完璧に覚え、度忘れしても導けるようにしておくこと必須。
実際の問題への運用で行き詰った際には読み直す。

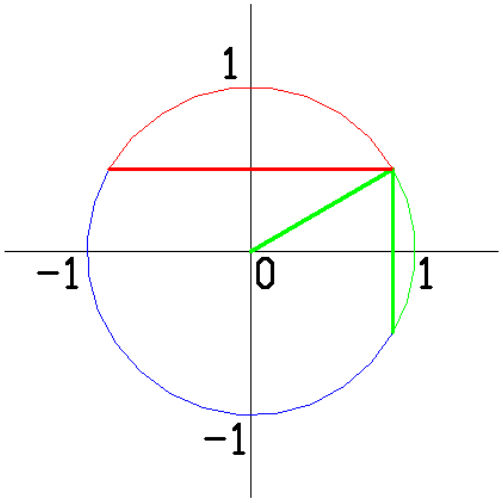
ステップ 8・9
三角関数のグラフとともに、一般解という考え方を知り、範囲に注意を払う習慣をつける。

ステップ 10
運用術を身に付けるための 8 題・・・チャート式と同列のトレーニング

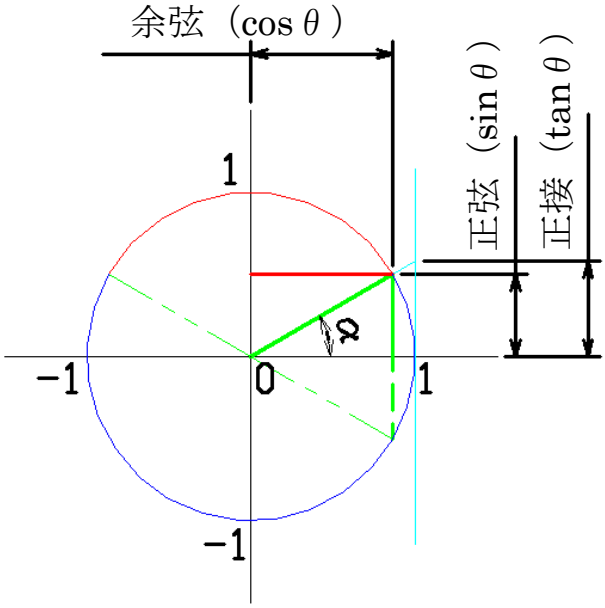
Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

sin（正弦）、cos（余弦）、tan（正接）は、
そもそも円の属性である「弦」に関する概念なのね。

下の図で、緑線の円弧に対応する弦と、赤線の円弧に対応する弦の長さを求めるというところからその概念が出てきたんだね。



で、「弦の長さを考えるにあたっては、長さの半分で説明すればいいじゃないか」
なんてことになったのだろうね。
下の図のように、４分の１円（この図では第１象限）で概念が確立されることになるんだ。



Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第１章:三角関数の意味･概念をイメージで焼き付ける

図のように、第１象限内の任意の半径線（動径）が x 軸となす角度を α と定義してやり、

x 軸を対象軸とした角度 2α が作る弧（劣弧：図では緑細線）に対応する弦の半分を、「角度に対して対応している弦」という意味で、角度 α に対する sin （正弦）と呼ぶ。

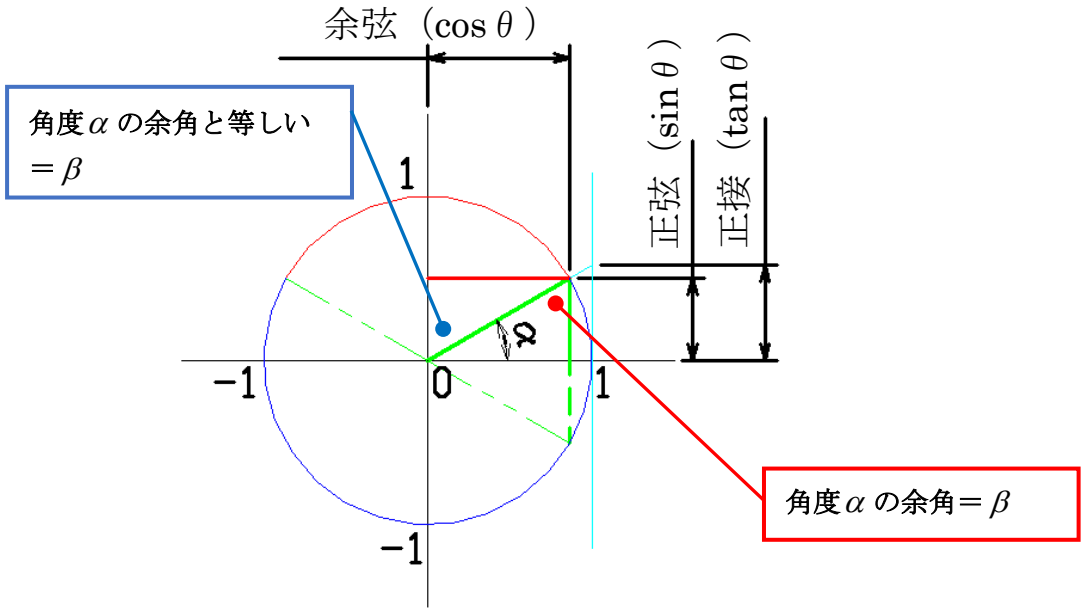
4 分の 1 円を考えたとき、角度 α から 90度 までの角を「角度 α の余角」と呼ぶ。

y 軸を対象軸とした余角の 2 倍の角度が作る弧（劣弧：図では赤細線）に対応する弦の半分を、「余角に対応している弦」という意味で、角度 α に対する cos （余弦）と呼ぶ。

ところで、これらの弦は、必ず、円の内部に出来るよね。
そこで、円弧の両端における接線に対し、弦と似た性質のものを定義すると・・・。

任意の半径線の延長線と任意の半径線とは反対側の半円弧の端点における接線との交点とその他端との長さを tan （正接）と定義した。
（言葉で言えばややこしいが、図で理解すれば充分！図では青細線）

結局、sin （正弦）、cos （余弦）、下図のように斜辺の長さが 1 の直角 3 角形において、斜辺以外の 2 辺の長さを表す概念と同じ意味であり、 tan （正接）は、斜辺以外の 2 辺の長さの比を表す概念ということになるね。



Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

【緑実線＋緑点線】が円の中心角 $\alpha+\alpha=2\alpha$ に対する弦の長さですね。
「角度 α ×2」の中心角に向かい合っているという意味で『正弦』と呼ばれます。

緑の直角定規で直角を除いた α ではないもう一つの角は「角度 α の余角」（●）と呼ばれます。
上の図で、この角度「角度 α の余角」は赤実線と向かい合った角度（●）と同じです。

「角度 α の余角」を仮に β と呼んでおきますと、

【赤実線＋赤点線】が円の中心角 $\beta+\beta=2\beta$ に対する弦の長さですね。
「角度 α の余角×2」の中心角に向かい合っているという意味で『余弦』と呼ばれます。

赤実線の長さはの緑の直角三角形において余角と向き合っている辺の長さと等しいですね。
ですから、一つの三角形でsin（正弦）、cos（余弦）を定義することができたというわけです。

ところが、弦の長さのままじゃ数学的に利用価値が小さそうだということで、その半分を取って図のように実線部分だけを考えることで使い勝手を良くしたのが三角関数というものなんです。

sin（正弦）、cos（余弦）、tan（正接）という概念は、円に対応する弦の長さの概念だということが分かってもらえたかな？

つまり、座標平面において、

単位円（半径 1）の円を考える。 単位円の半径（動径）を斜辺として持つ直角 3 角形を考える。

ことによって、三角関数の全ては、いつでも説明ができていくんだよ！

すなわち、xy 座標平面における半径 1 の単位円上の点と原点を結ぶ線が作る角 α において、

sin は該当角に対抗する辺の長さ、すなわち y 座標そのものである。 cos は該当角に接する辺の長さ、すなわち x 座標そのものである。 tan は、斜辺の傾きそのものである。

ことが分かるね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

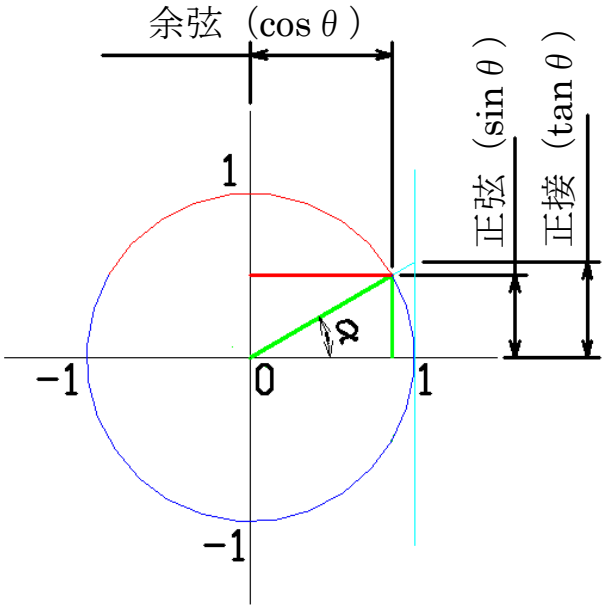
結局、円の属性である「弦」から出発したけれども、
「なーんだ。三角形の辺のことと同じじゃないか！」となったわけね。
だから、座標平面ではなく、ごく一般的な三角形では次のように表現できるわけ。

ある一つの３角形の内角に対して、

$\dfrac{\text{内角に対抗する辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}}$という演算を、その内角のsin

$\dfrac{\text{内角に接する辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}}$という演算を、その内角のcos

$\dfrac{\text{内角に対抗する辺の長さ}}{\text{内角に接するの長さ}}$という演算を、その内角のtan



Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

そして、三平方の定理（ピタゴラスの定理）により

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$ ・・・[公式 01b-01]

が成り立っていることが分かるね。

[公式 01b-01]は、sin と cos の定義により、三角関数では、暗黙の了解になる。
問題には、いちいち、こんな常識は条件として書いてくれないよ。

だから、三角関数の問題を処理するにあたっては、[公式 01b-01]の関係があることを、
当たり前の条件として、常に頭の中に待機させておかねばならないわけね。
慣れない内は、三角関数の問題だと分かれば、まず[公式 01b-01]から書き出すぐらい
のつもりでいると体に沁み込むだろうね。

もう一つ、ことのついでに最も利用されるシーンが多い公式を挙げておくね。

$$\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$ ・・・[公式 01b-02]

あるいは、逆から

$$1+\tan^2 x=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

当たり前と言えば当たり前なんだけれども、
これは意識しておかないと、なかなか出てくるものではないね。

ここで、[公式 01b-02]は、

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$ ・・・[公式 01b-02r]

と同じことだということも忘れないでよ。

よく、$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ という公式は知っていたけれども、
問題を解く途中で、$\cos^2 x$ という形でしか出てこなかったから、
使いそびれたなんて子も居るんだなぁ、これが・・・。

この２つの基本公式は、いつでも使えるように意識しておいて。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

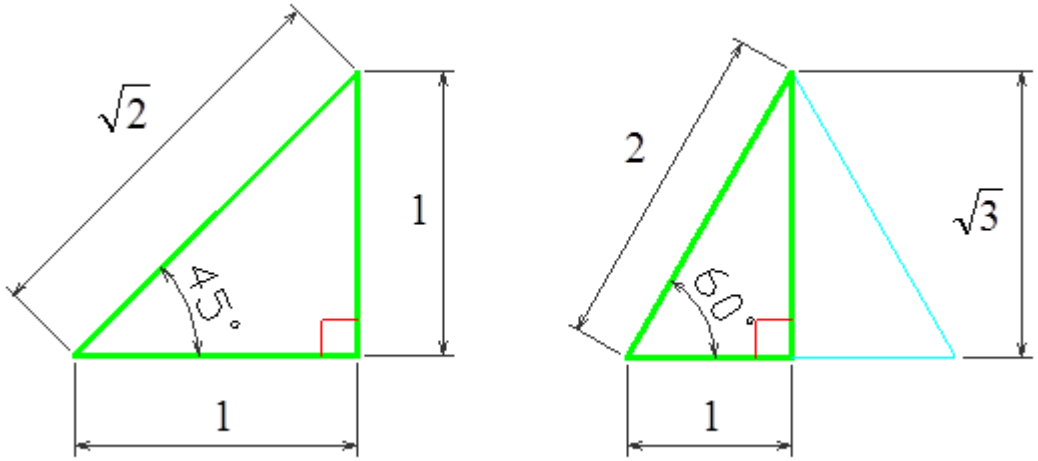
と同時に、sin , cos は、 $\boxed{-1 \le \sin\alpha \le 1,\ -1 \le \cos\alpha \le 1}$

の範囲にあることを、いつでも意識していなければならない！

次は、基本の最後のお話です。
三角関数においては、幾何学的にすぐに割り出せる sin , cos , tan の値があります。
それは、0°, 30°, 45°, 60°, 90°　という角度です。

これらは、グラフを書く際にプロットできる三角関数に関する基本角と言える角度です。
すぐに出るようにしておいて下さいよ。

下に、示したのは
直角二等辺三角形（左）及び 2 角が 30°　と 60°　の直角三角形（正三角形の半分 : 右）です。
それぞれ、$\alpha = 45°$ の場合、$\alpha = 60°$ の場合にできる緑色の三角定規です。

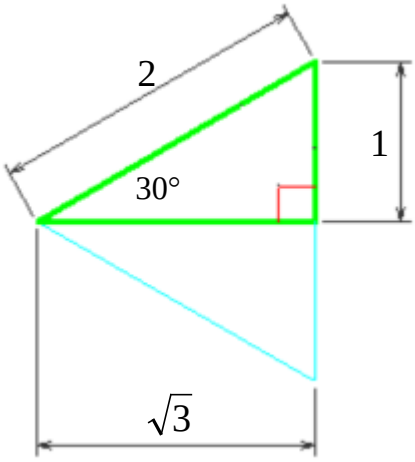


左は直角二等辺ですから斜辺以外の 2 辺は片方を 1 とすれば他方も 1。
右は正三角形を真っ二つに割ったものですから、長辺を 2 とすれば短辺は 1。

それぞれにピタゴラスの定理を適用すれば、3 辺全てが明らかになり、sin , cos , tan は全て決まりますね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

$\alpha = 30°$ の場合は、$\alpha = 60°$ の三角形を寝かせただけで形は同じです。



これらをもとに、表にしておきましょう。

360 度法	弧度法	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	値なし

さて、次の問題は、今まで第 1 象限だけ（即ち、$\alpha = 0 \sim 90°$）で考えてきましたが、動径が第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限にある場合（即ち、$\alpha = 90 \sim 360°$）はどうなるの？ってことですね。

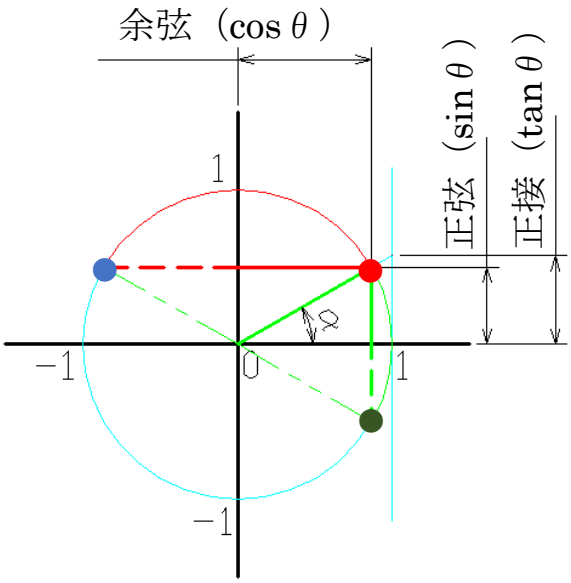
単なる直角三角形なら、sin は角度と向き合った辺÷斜辺の長さであり、 cos は余角（もう一つの角）と向き合った辺÷斜辺の長さであるという理解だけでいいのですが、座標系となるとこれだけでは不十分です。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

ですから、

> xy 座標平面における半径１の単位円上の点と原点を結ぶ線が作る角 α において、
> ・sin は角度 α に向き合う辺の長さ、すなわち y 座標そのものである。
> ・cos は角度 α に接する辺の長さ、すなわち x 座標そのものである。
> ・tan は、x 方向に１増えたときに y が増える値、すなわち（斜辺の）傾きそのもの

という考え方を身に付けねばなりません。



sin は単位円の動径点（●あるいは●あるいは●）の y 座標そのものですから

$\sin\alpha$ と $\sin(180° - \alpha)$ は同じ値です。

$\sin\alpha$ と $\sin(360° - \alpha)$ は絶対値は同じですが符号が逆になります。

cos は単位円の動径点（●あるいは●あるいは●）の x 座標そのものですから

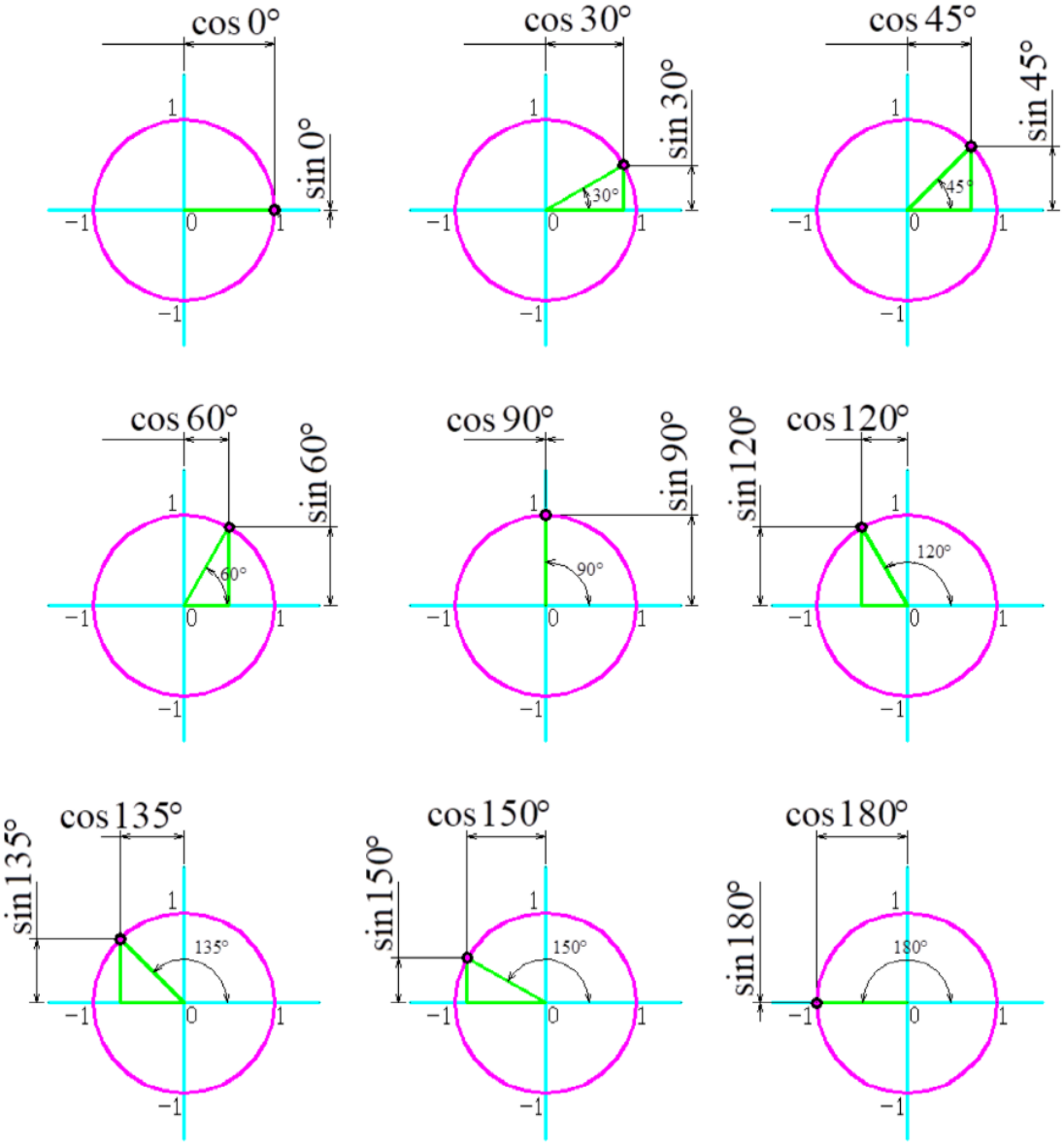
$\cos\alpha$ と $\cos(180° - \alpha)$ は絶対値は同じですが符号が逆になります。

$\cos\alpha$ と $\cos(360° - \alpha)$ は同じ値です。

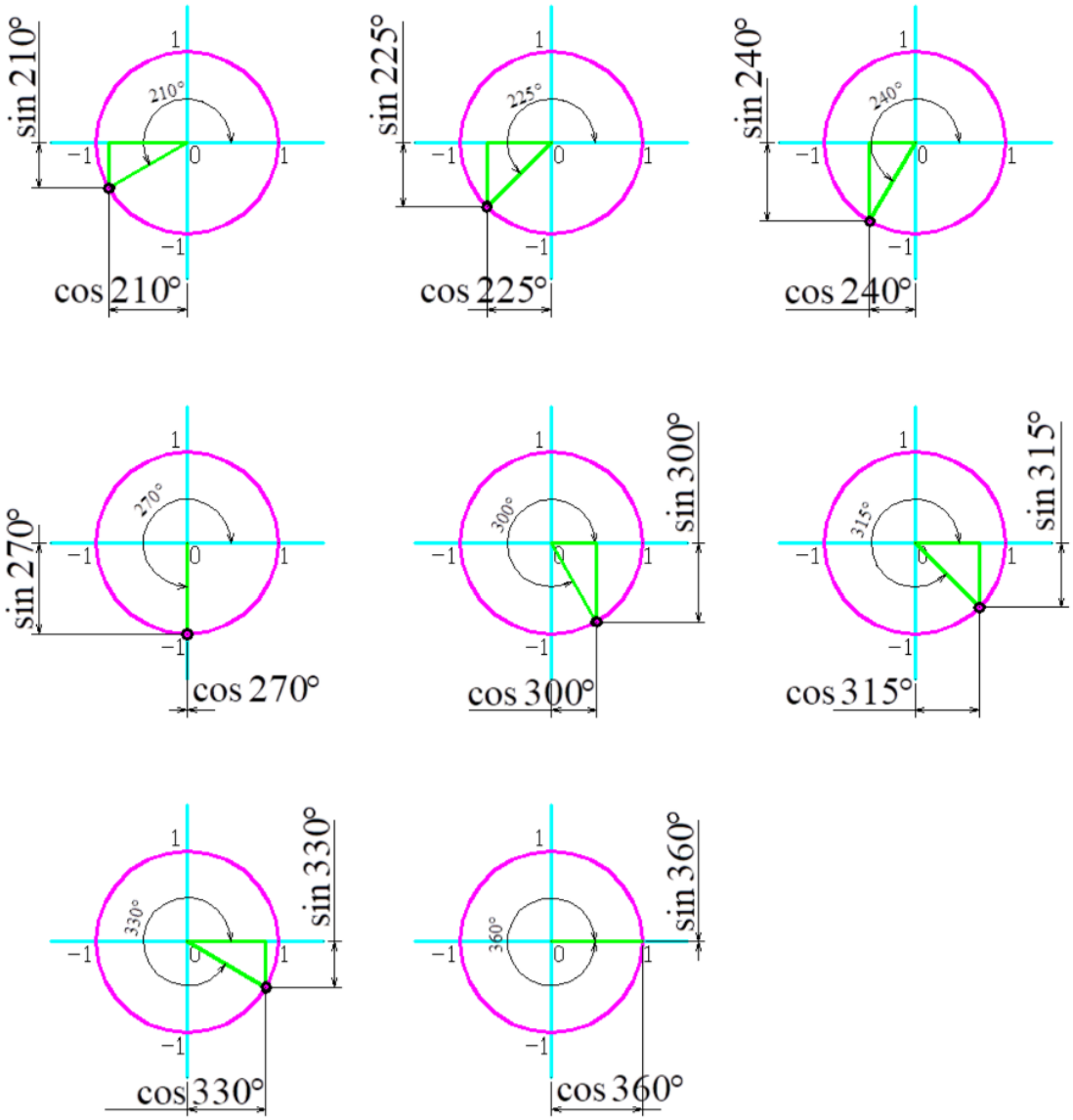
Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

最後に、α が 0°から 360°まで 1 周するときの、sin と cos の意味を図で理解しておきましょう。

三角定規は P(x, y)から x 軸に垂線を下ろした点と原点 0 の 3 点で出来る直角三角形を考えます。(緑色)



Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。



ここにピックアップした角度は､ピタゴラスの定理を使って幾何的に簡単に値が特定できる、即ち、グラフを描く際に簡単にプロットできる角度です。

（鈍角三角形になったときは補角側に直角三角形を配置すればいいですね）
三角関数のグラフの書き方は、第８章で説明します！

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 2 章:公式に神経を使わない一歩

三角関数の公式を暗記しようとする人があります。
もちろん、数学が出来る子も暗記はしていますよ。
が、決定的な違いがあることに気が付いてください。

- 度忘れしても、自分で導き出せる
- 暗記することが目的で暗記はしていない。
  語呂合わせ的に覚えているが、あくまで、トレーニングの結果
  自然に身に定着させている。

もちろん、暗記しておけば便利ですし、普通はたいてい暗記しています。
しかし、もし、度忘れしても（たいてい、符号がどっちだったとか、sin と cos
どっちだったとかで悩んだりします)、その場で検証できるようにしておけば
不安はなくなります。

記憶なんてものは、使っていればなんとなく覚えているものです。
そして、使い込んでいれば、自然に記憶に定着してきます。

覚える必要すらない（その場で考えればすぐに出てくる）ものもたくさんあります。
「意味不明」のまま進んでいるから、どこかの大学に合格するまで絶えることなく
「暗記しなくっちゃ」という脅迫概念に囚われることになるのですね。
たった数時間、しっかりと意味を考える時間を取り、実際に運用してみることこそが
最良の「暗記」なのに、もったいないことです。

理想の形を言っておきましょう。
基本公式は、トレーニングによって完璧に身に付いており
（暗記されている)、且つ、度忘れしても導ける。

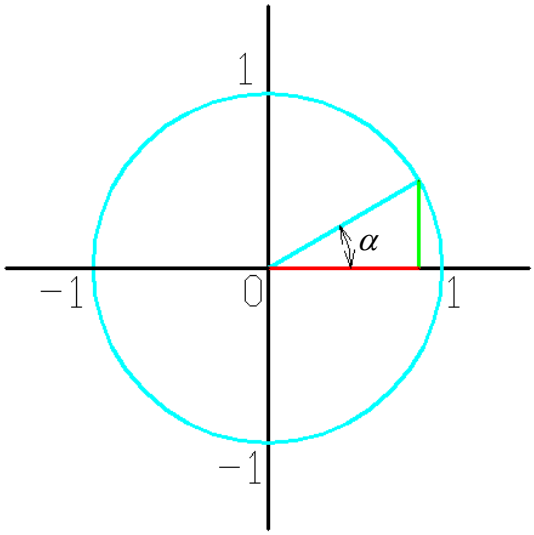
それでは、本章から三角関数の公式を順に斬っていくね。
それにあたって、注意して欲しいことをまず書いておくね。
ここからは、座標平面として、**正負を考慮していく**
ことを肝に銘じておいて！

とにかく、単位円の中に直角三角形定規を配置する。
三角関数の単元では、これだけで事足りる公式が、
教科書でも参考書でも、まず最初に出てきます。
暗記など必要の無い代表的な公式。その場でも 1 秒で出る公式たちです。
第 2 章では、ここから崩していきます。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 2 章:公式に神経を使わない一歩

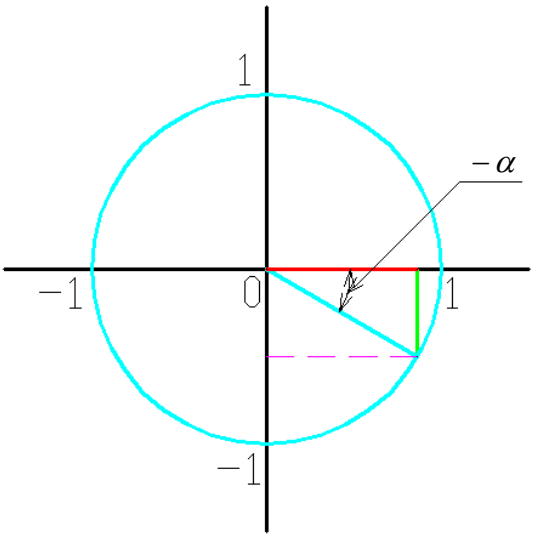
［図１］角度$-\alpha$ の sin , cos を、基本角度α で置き換える



緑の線は角度α に対する sin 、すなわち$\sin\alpha$　・・・符号は＋

赤の線は角度α に対する cos 、すなわち$\cos\alpha$　・・・符号は＋

↓では、直角三角形の配置を変えてみます。↓



定義より、緑の線は角度$-\alpha$ に対する sin 、すなわち$\sin(-\alpha)$　・・・符号は－

定義より、赤の線は角度$-\alpha$ に対する cos 、すなわち$\cos(-\alpha)$　・・・符号は＋

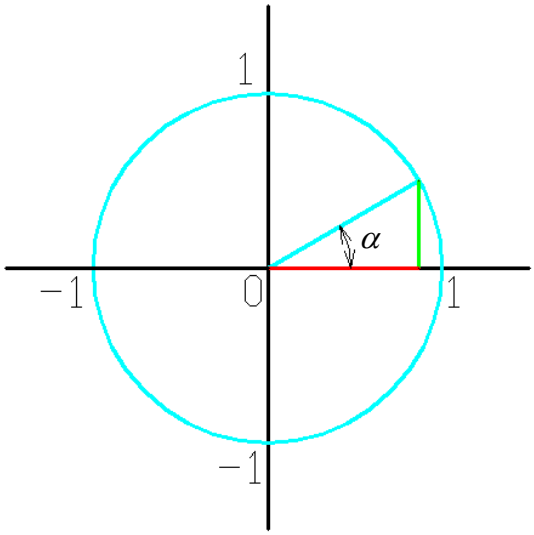
よって、

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

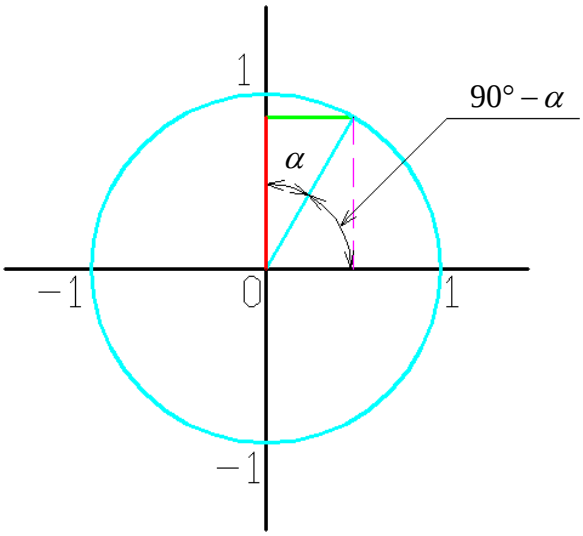
第 2 章:公式に神経を使わない一歩

[図 2]角度$90° - \alpha$の$\sin$, $\cos$を、基本角度αで置き換える



緑の線は角度αに対する$\sin$、すなわち$\sin\alpha$　・・・符号は＋
赤の線は角度αに対する$\cos$、すなわち$\cos\alpha$　・・・符号は＋

↓では、直角三角形の配置を変えてみます。↓



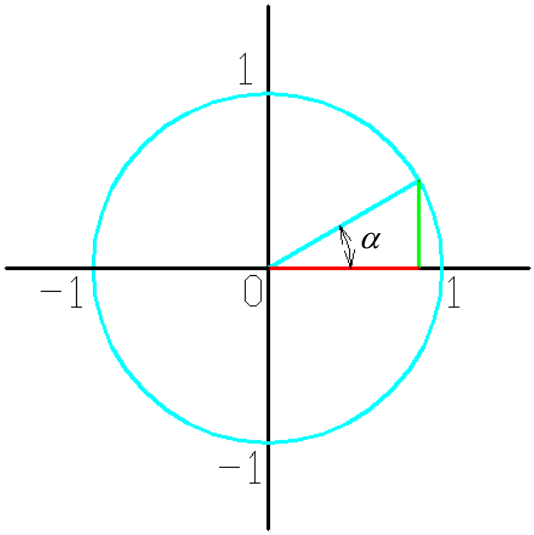
定義より、緑の線は角度$90° - \alpha$に対する$\cos$、すなわち$\cos(90° - \alpha)$　・・・符号は＋
定義より、赤の線は角度$90° - \alpha$に対する$\sin$、すなわち$\sin(90° - \alpha)$　・・・符号は＋
よって、

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 2 章:公式に神経を使わない一歩

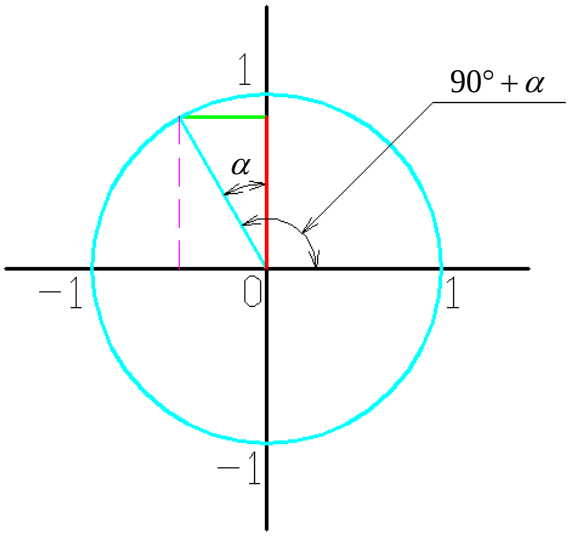
[図 3]角度$90°+\alpha$ の$\sin$, $\cos$ を、基本角度α で置き換える



緑の線は角度α に対する$\sin$ 、すなわち$\sin\alpha$　・・・符号は＋

赤の線は角度α に対する$\cos$ 、すなわち$\cos\alpha$　・・・符号は＋

↓では、直角三角形の配置を変えてみます。↓



定義より、緑の線は$90°+\alpha$ に対する$\cos$ 、すなわち$\cos(90°+\alpha)$　・・・符号は－

定義より、赤の線は$90°+\alpha$ に対する$\sin$ 、すなわち$\sin(90°+\alpha)$　・・・符号は＋

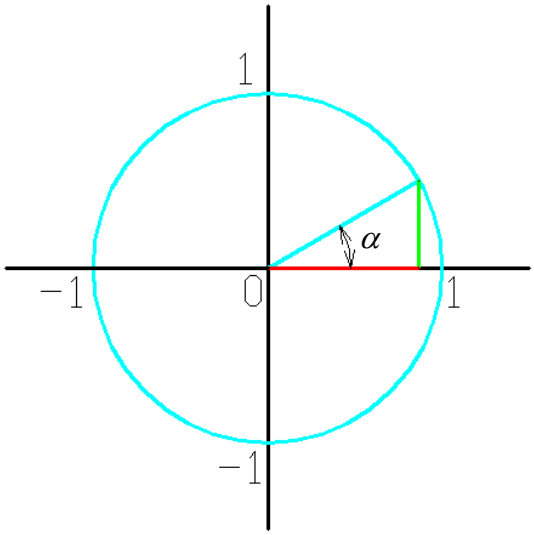
よって、

$$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$$

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

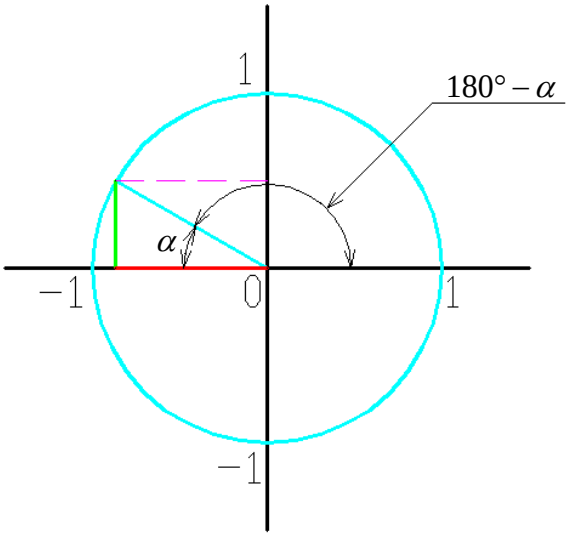
第 2 章:公式に神経を使わない一歩

[図 4]角度$180° - \alpha$の sin , cos を、基本角度αで置き換える



緑の線は角度αに対する sin 、すなわち$\sin\alpha$　・・・符号は＋
赤の線は角度αに対する cos 、すなわち$\cos\alpha$　・・・符号は＋

↓では、直角三角形の配置を変えてみます。↓



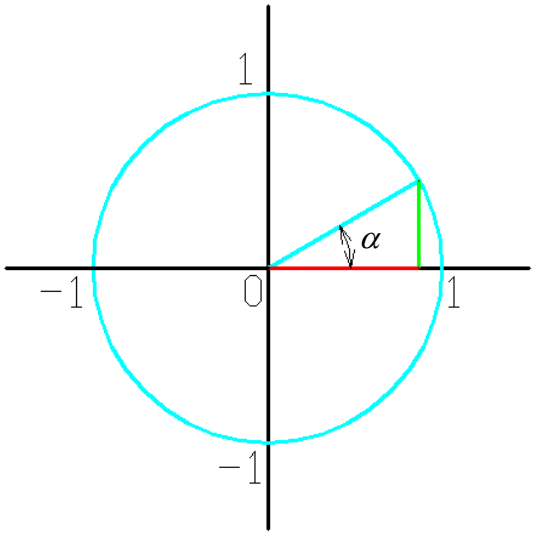
定義より、緑の線は$180° - \alpha$に対する sin 、すなわち$\sin(180° - \alpha)$　・・・符号は＋
定義より、赤の線は$180° - \alpha$に対する cos 、すなわち$\cos(180° - \alpha)$　・・・符号は－
よって、

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 2 章:公式に神経を使わない一歩

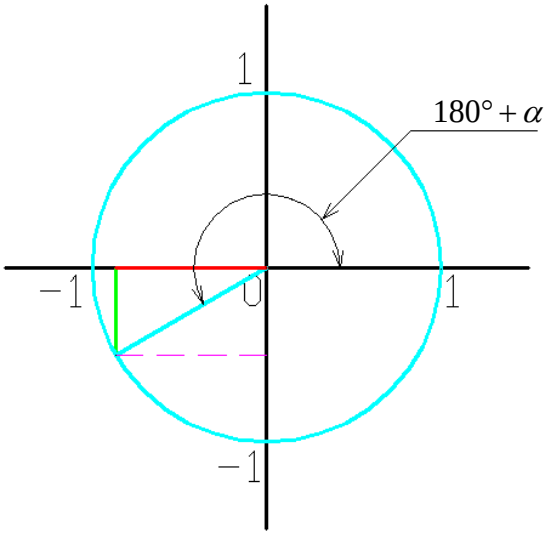
[図 5]角度$180° + \alpha$ の$\sin$, $\cos$ を、基本角度α で置き換える



緑の線は角度α に対する$\sin$ 、すなわち$\sin\alpha$　・・・符号は＋

赤の線は角度α に対する$\cos$ 、すなわち$\cos\alpha$　・・・符号は＋

↓では、直角三角形の配置を変えてみます。↓



定義より、緑の線は$180° + \alpha$ に対する$\sin$ 、すなわち$\sin(180° + \alpha)$　・・・符号は－

定義より、赤の線は$180° + \alpha$ に対する$\cos$ 、すなわち$\cos(180° + \alpha)$　・・・符号は－

よって、

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

実際の問題で、sin や cos の中に、$-\alpha$ や $90°-\alpha$ とかが入っていれば、いやだよね！

でも、ここまでに説明したように、
基本角度 α を持つ直角三角形を図のように置き換えることによって、
いつでも、いやな奴は抹殺して、基本角 α に置き換えてやることができる。

大切なことは、

> sin や cos の中身に、$-\alpha$ や $90°\pm\alpha$ 、$180°\pm\alpha$ 、$270°\pm\alpha$ だとかが出てきても
> $90°$ や $180°$ は消せ、単なる基本角 α の sin 、cos に置き換えることができる。
> $0°$と$180°$ を起点として $\pm\alpha$ 場合、$\sin\to\sin, \cos\to\cos$
> $90°$と$270°$ を起点として $\pm\alpha$ 場合、$\sin\to\cos, \cos\to\sin$ と入れ替わり、
> あとは符号だけ照らし合わせればよい！

と認識しておくことなんだね。

書いてまとめると、下のような公式集になってしまうけれど、
いちいち覚える必要の無い代表選手のようなもの。
公式と言うより、「その場で導く常識」とでも言っておこうかね。
本章で示した図を思い浮かべれば、その場で、しかも、ものの 1 秒でできちゃう！

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\sin(90°\pm\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha \quad \text{[複号同順]}$$
$$\tan(90°\pm\alpha)=\mp\frac{1}{\tan\alpha} \quad \text{[複号同順]}$$
$$\sin(180°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha \quad \text{[複号同順]}$$
$$\cos(180°\pm\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(180°\pm\alpha)=\pm\tan\alpha \quad \text{[複号同順]}$$

tan に関しては
$\tan=\dfrac{\sin}{\cos}$ から考えれば良いね。

これらを公式として覚えていなきゃ、学校の試験も出来ないというようじゃ、
次の章に進んでも意味がないとすら言えるよ。
とにかく、その都度、すぐに変換できるように訓練することが先決ね。

これが出来れば、随分と気分も楽になるよ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章:三角関数の母なる「加法定理」を知る

本章では、三角関数の心臓とも言って過言ではない最も基本の公式
「加法定理」について、同じようにイメージから捉えてみるよ。

「加法定理」の公式は、1 秒や 2 秒では出てこない！
だから、普通は、「加法定理」はリズム感で暗記しているものなのね。
たとえ忘れたと言っても、「符号がどっちだったかなぁ？」ぐらいだね。

完全に忘れた場合、導き出すにはちょっと手間がかかるから、
やはり、これだけは完璧に覚えておくべきだろうね。
だからと言って、先ほども述べたように丸暗記は、君に何も力を与えはしない。

くどいようだけれども、
いざのときには導き出せる。
そのことこそが大切さ。

さらに、次章から、合成や倍角の公式・3 倍角の公式・半角の公式、
さらには和⇔積変換の公式がわんさか出てくるけれども、
これらは全て、この「加法定理」から出て来るのね。
うんざりするほど沢山書いてある公式群の多くは、「加法定理」が源というわけね。

そして、導出するのにとても手間がかかるのなら話は別だけれど、これらの多くは
ほとんど手間がかからないから、「加法定理」さえ理解し覚えておけば、
多くの公式は覚えなくてもノープロブレムというほどなんだね。

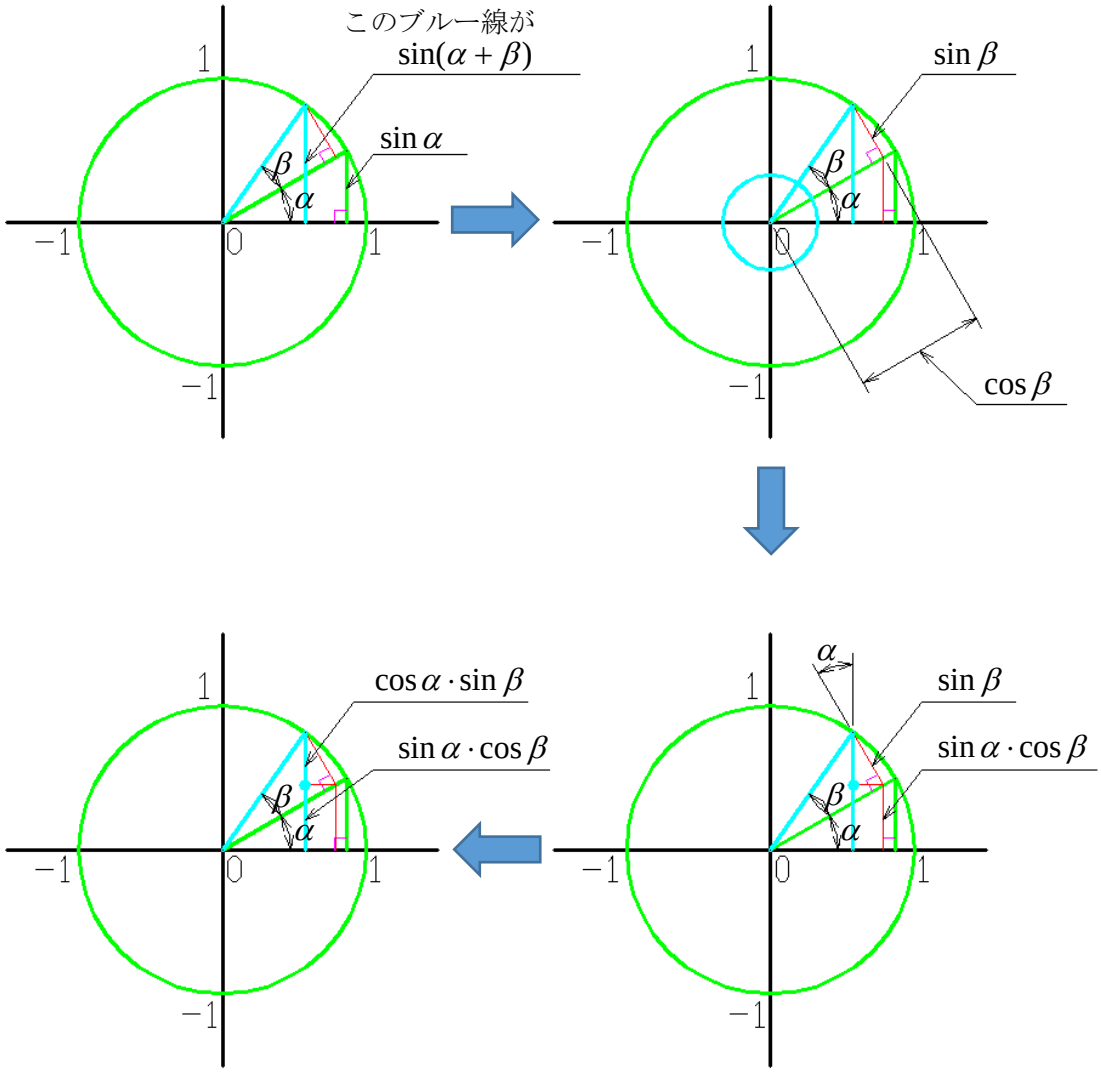
それは、次章以降読んでもらえれば分かるはずだから、
まずは、この「加法定理」をしっかり理解し、公式としても覚えておこう。
リズム感で覚えれるし、トレーニングを積むことで記憶に定着する。

そうすれば、君も三角関数に関しては、土台がしっかり出来たことになるわけよ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章:三角関数の母なる「加法定理」を知る

[図 3-1s]「加法定理」の概念をイメージで理解する図（sin 編）



矢印の順に考えていくと、ここに、

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ・・・[公式 03k-sp]　という公式が出てくる。

出てきた結果は、

サインのプラスはサインコサイン＋コサインサイン

と語呂合わせ的なリズム感で覚えておけばよいね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

では、$\sin(\alpha-\beta)$はどうなるの？
といったときに、また上の図のように考えようとする人が居る。
それはそれで必要なことなんだけれど
今、
$\sin(\alpha+\beta)$が出たんだから、
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{\alpha+(-\beta)\}$と考えればいいんじゃないの？

よく言われたんじゃない？
「引くというのはマイナスをプラスするということなんだよ」って・・・。

じゃぁ、利用しようよ！

αからβを引くのは、αに$-\beta$を足すことだって・・。

出てきた[公式 03k-sp]の公式そのまま利用すれば

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$
・・・[公式 03k-sm]　という公式が出てくる。

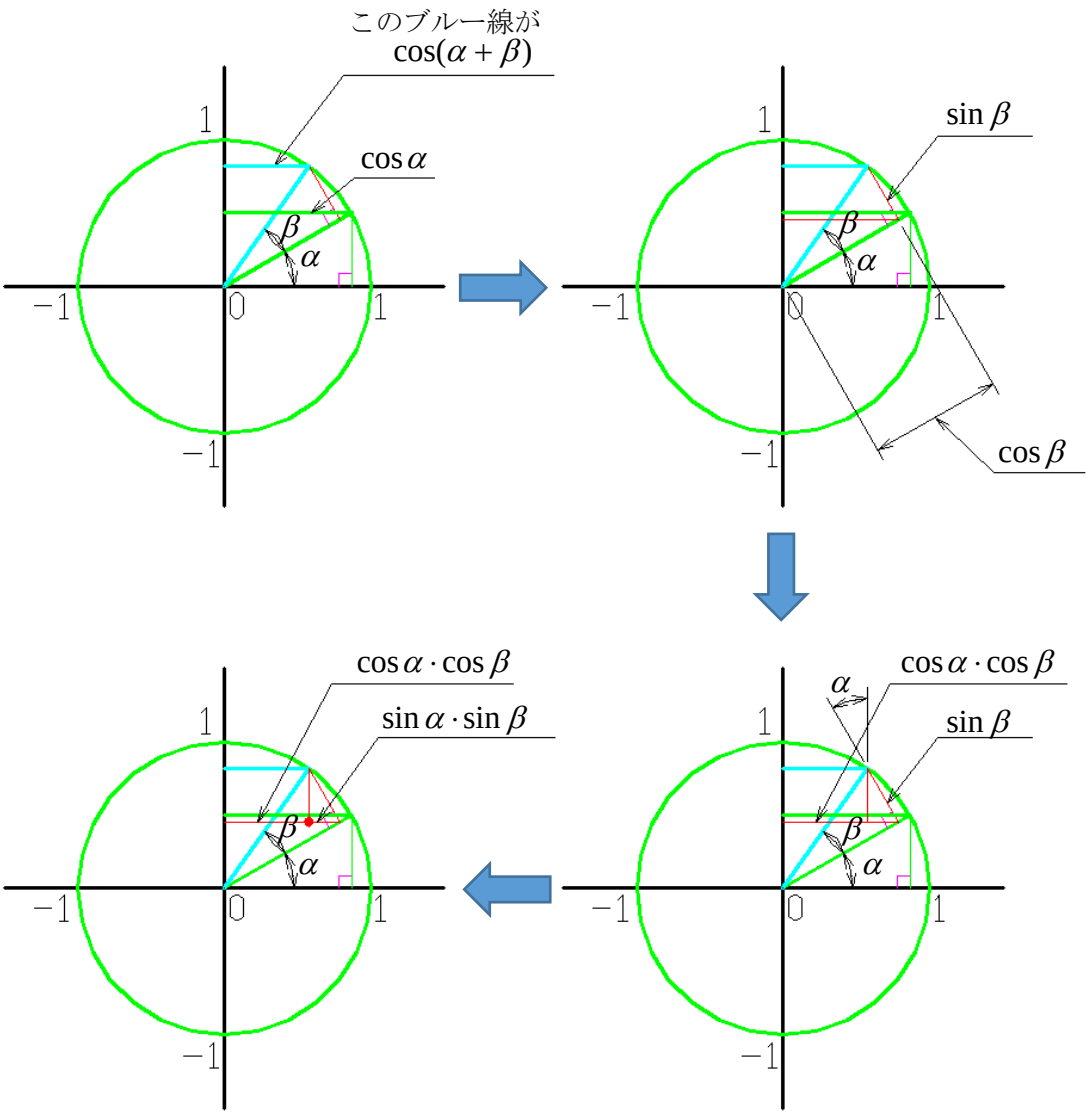
ここで利用したのは、第 2 章の
[図 2-1]　角度$-\alpha$の sin , cos を、基本角度αで置き換える　ということね。
すなわち、
$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$
と、角度$-\alpha$の sin , cos をαの sin , cos で置き換えることね。

さて、同様に
$\cos(\alpha+\beta)$だけれども、[図 3-1s]で考えたのと同じように考えればよい。
次のページで、[図 3-1c]「加法定理」の概念をイメージで理解する図（cos 編）として
添付したけれども、まずは、自分で導き出すクセをつけてみて。

自分で導き出せてから、確認・照合してみることを課題として残しておくね。
そして、$\cos(\alpha+\beta)$が出れば、$\cos(\alpha-\beta)$は先ほどと同じく
「マイナスを足す」という考えでそのまま導き出してくれたまえ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

［図 3-1c］「加法定理」の概念をイメージで理解する図（cos 編）



矢印の順に考えていくと、ここに、

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ・・・［公式 03k-cp］　という公式が出てくる。

出てきた結果は、

コサインのプラスはコサインコサインーサインサイン

と語呂合わせ的なリズム感で覚えておけばよいね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

結局、「加法定理」の全ては、

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \text{[複号同順]} \quad \cdots\text{[公式 03k-s]}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \text{[複号同順]} \quad \cdots\text{[公式 03k-c]}$$

となります。

この公式はリズム感で覚えておくのがベスト！

sin の加法は	サインコサイン＋コサインサイン	・・・符号は「順」
cos の加法は	コサインコサイン＋サインサイン	・・・符号は「逆」

では、「$\tan(\alpha+\beta)$は？」　って真面目な質問をしてくる子がいる。
どこまでいっても教えてもらわないと気が済まないんだね。
その依存心をなくすことが、僕は先決問題だと思うよ。

「$\tan(\alpha+\beta)$は$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$のことなんだから、自分で検証できるからやってみよう」
とぐらい思わないと、数学はいつまでたっても伸びないよ。

聞いているだけで満足している子、あるいは、聞いているだけで分かったような
気になっている子が伸びることは 100%あり得ない。
と、ここでも断言しておくよ。

では、$\tan(\alpha+\beta)$が、どのような形になるかを示しておこう。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

［1 行目→2 行目の変形は分母・分子をともに$\cos\alpha\cos\beta$で割ってやる］

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \text{[複号同順]} \cdots\text{[公式 03k-t]}$$

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

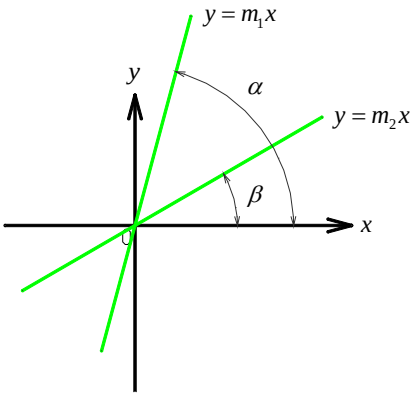
ここで、気が付く子がいるかもしれないけれど、
tan は直線の傾きだったね。

すると、座標平面上に 2 つの直線があるとして、
その直線が水平線となす角を、それぞれ α, β としてやり、
一つの直線の傾きを m_1、もう一つの直線の傾きを m_2 としてやれば
$m_1 = \tan\alpha, m_2 = \tan\beta$ に他ならない。

ところで、$\tan(\alpha - \beta)$ はどんな意味だろうか。
そう、2 つの直線のなす角の tan という意味だね！
となると、2 つの直線のなす角の tan は、

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

すなわち、
2 つの直線の傾きが分かっていれば、そのなす角の tan （正接）が分かることになる。



このように説明を受けたら、
2 つの直線が直交する時の条件は、たしか $m_1 m_2 = -1$ だったよな。
ベクトルでも、直交条件は「内積＝0」とか習ったし、
この際に、直交条件を見直しておこう。

なんて作業をするようになれば、
君は間違いなく数学が抜群にできるようになるだろうな！

京都大学２００９年文系数学入試問題着眼ノートでは、
文系[1]の問題から、派生して■確認復習：直線の直交条件を説明しているから
この際にじっくり、2 直線のなす角や直交条件を自分の中で整理してみてね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章:三角関数の母なる「加法定理」を知る

ところで、第 1 章では、
$\sin, \cos, \tan$ の値で、幾何学的に明確な値として求められる角度を挙げておいたね。
$0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ の角度だけだったね。

ところが、この「加法定理」を学んだ後では、もう少し値が分かる角度が出てくる。
$15°$と$75°$だ！

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ここは読み流すだけではなく、自分の手でトレーニングしてみてよ。

次に、$15°$と$75°$はどちらか一方が分かれば、他方は計算する必要がないことは、
第 2 章をもう一度理解し直してみれば分かるだろう。

$$\sin 15° = \sin(90° - 75°) = \cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 15° = \cos(90° - 75°) = \sin 75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$
というわけだ。

参考までに、最初に$15°$を「加法定理」から求める場合は、次のようになるね。

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

これらの値を覚えておく必要はないけれど、もし必要なときは、
このように導き出せることを認識しておくとよいね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 4 章:三角関数の合成を逆向きに考える

さて、次に【三角関数の合成】というやつを考えてみる。
本「帝都大学への数学」では、普通とは逆向きに考えていくね。

ここでは、2008 年京都大学前期文系数学の問題［4］の補足説明も兼ねることにする。

前章の加法定理において、
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　・・・[公式 03k-sp]があった。

ならば、
$a\sin\alpha+b\cos\alpha$ という形は $k\sin(\alpha+\beta)$
という形に変身させることが出来るのではないか？

そんな思いがよぎらないかい？

なぜなら、
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ は、左右の項を入れ替えて書いてみると、
$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$

もし、$a=\cos\beta, b=\sin\beta$ だと置いてやれるなら、
$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)$ になっちゃうから・・・。

あるいは、逆に
$a\sin\alpha+b\cos\alpha$　において、
もし、$a=\cos\beta, b=\sin\beta$ と置いてやれるなら、
[公式 03k-sp]の右辺そのものになるのだから・・・。

なんだか、深い関係がありそうなことが予想される閃きだった。

ただ、三角関数には、第 1 章で述べたように、
畏れ多くも、$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$　という性質がある。
そうすると、「もし、$a=\cos\beta, b=\sin\beta$ と置いてやれるなら」と軽く書いたけれども、
これは、$a^2+b^2=1$ でなければならないという制約ができてしまうことを意味する。

どんな a と b であっても、置き換えられなければ意味が無いじゃないか！

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

ということで、

なら、$a\sin\alpha + b\cos\alpha$ という形を

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

と変形してみたらどうだろうか？

これなら、

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$ となるから

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$$ と考えることができる

これで初めて、

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \sin(\alpha+\beta)$$

とすることができる。

すなわち、

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$$

但し、$\sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

という形に表せることになる。

sin と cos の和の形の式が、sin だけの式として表すことができた。
これが、三角関数が合成されたということね。

実は、三角関数の合成は、加法定理が姿を変えたものに他ならないということね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。