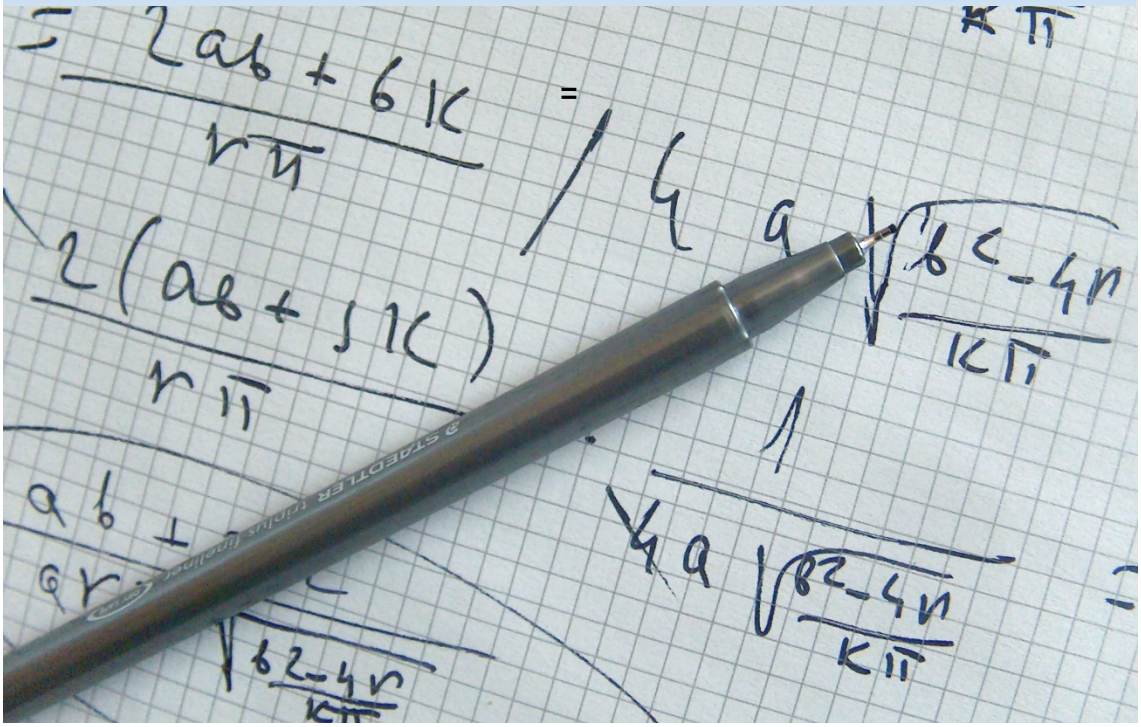
ー感動！ガリレオ流 帝都大学への数学　vol.1ー

面白いほど変幻自在に数式を操れる秘密

つまずいて戻って来たら初めて見えた風景…【規則性】【方程式との絆】



式の展開と因数分解は実に味気のない単元ですが、力の全てはここに戻って来ます。

戻って来さえすれば、数学が苦手な君にも気づきさえしなかった風景が見えます。
面白くもないこの単元を淡々とこなして終わった気分の秀才君はまだ見ない風景が。

数学で一貫して要求される「数式を変幻自在に操る力」が生まれるのはこの瞬間！
この風景を見ることがなければ、公式恐怖症から解放される日は永遠に来ません！

==========

発行日：2009 年 3 月 20 日

著者：ニ三五　八十三（フミコ　ハトミ）

発行元：「帝都大学へのビジョン」事務局

https://e-littlefield.com/teito-vision

teito@e-littlefield.com

==========

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

著作権について

「帝都大学へのビジョン」及び付属著作物全て（以下、本書と表記します）は、
著作権法により保護されています。
本書の取り扱いについては、以下の点にご注意ください。

本書の著作権は、「帝都大学へのビジョン」事務局にあります。
また、本書を購入された本人及びご家族のみが読む事を許され、
購入者本人のみが内容を元に活用出来るものとします。
（購入者本人が保護者の場合はお子様が活用できるものとします。）

許可なく無断で、本書の一部、または全部を複製及び転載することを一切禁じます。

コピー、ビデオや電子メディア、メール、メルマガなどでの複製、転載、転売
およびインターネット上で公開する事を禁止します。
またインターネット上で転売（オークションなどを含みます）することも禁止します。

万一上記の禁止行為を発見した場合は、日本国の法律に従い解決をいたします。
上記規定に違反した場合、違約件数×違約発見時の本書の販売価格と
法律に従い適正な賠償額を請求いたします。
上記規定の禁止行為を発見された方は、直ちに連絡頂ければ幸いです。

【免責事項】
本書は、著者のこれまでの指導実績と理念を元にまとめあげられたものであり、
また、多くの中高生の成績アップを願ってつくられたものですが、
全ての読者の利益を保証するものではありません。
本書により、いかなる損害が発生しましても一切の責任を負いません。
すべては自己責任で行われることとします。

本書をご購入していただきました方に、このようなことをお伝えするのは
心苦しいことなのですが、法律上の必要記載事項ですので、ご理解の程お願いいたします。

本書を開封した時点で、購入者は、これに同意したものとします。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

因数の頭に解宿る　～因数分解から方程式へ～

ー感動！ガリレオ流 帝都大学への数学　vol.1ー

目　　次

序章：二階から因数分解　～何故、変幻自在に数式を扱えないのか？～　4～

第 1 章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～　10～

第 2 章：敵は方程式にあり　～君は、何のために因数分解するのか？～　18～

第 3 章：犬も歩けば因数に当たる？　～方程式と因数分解の秘密な関係～　23～

第 4 章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～　36～

第 5 章：一寸の式にも二項定理　～二項定理・多項定理と因数分解～　50～

第 6 章：因数は死して解を残す　～再び 2 次方程式と因数分解の間柄～　57～

第 7 章：文字多くして式天に昇る　～多文字の因数分解公式～　64～

第 8 章：式は口ほどにものを言う　～美しき対称式・交代式と因数分解～　67～

第 9 章：覚えて忘れろ！転ばぬ先の定石　～因数分解の定石とＱ＆Ａ～　84～

第 10 章：無いセンスは振れない　～数学センスをコツコツ磨く～　100～

第 11 章：問いは変われど脳変わらず　～発展問題 4 題～　113～

第 12 章：先んずれば帝都を制す　～挑戦問題 5 題～　120～

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：二階から因数分解　～何故、変幻自在に数式を扱えないのか？～

因数の積の形で与えられた式をバラバラに「展開」することは、
根気よく正確にやりさえすればできるということは、君も知っているに違いない。

逆に、「因数分解」とは、バラバラに展開された多項式をいくつかの因数の積に
分解することだから、君が難しいと感じても、それはむしろ自然なことさ。

秩序よく並んでいるものをバラバラにするのは簡単だけれど、
それを元通りにすることは難しい。
世の中の全てのことがそうだよね。

ジグソーパズルだってそうだし、床にこぼした砂糖だってそうだ。
「覆水盆に帰らず」・・・これが因数分解ができないということなんだね。

式の展開や因数分解にはたくさんの公式がある。
正確に言えば、「たくさんあるように見える」が正しい！
しかも、「これは中学で習い、あれは高校に入ってから習う。」というように
プツ切れで知識として与えられていくんだね。

だから、君の頭の中には、知識は断片的にはあるけれども繋がっていない。
そうじゃないかな？

これらの「式の展開や因数分解」に関して、大きな流れの中で教わり、
理解していくという作業が今までにあっただろうか？
おそらく、習いっぱなしで他の単元の中で見直しなどしたこともないのじゃないか？
もし、君が数式を自由に操れないとすれば、このことが大元の原因にある。

数学に限っては、習った断片的な知識を大きな流れの中で見直していくという作業が、
理解する上ではどうしても必要になるんだ。
かっこよく言えば、「再構築する作業なしに数学は理解できない」ということね。

数学は、散在する多くの点を線にすること自体がその内容となる教科。
だから、本当は、この作業をやらないと、
いつまで経っても、君の頭には知識が散在した点としてあるだけで、
そのそれぞれの点と点が繋がって線になることはない。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：二階から因数分解　～何故、変幻自在に数式を扱えないのか？～

本当は、単元単元で、全体の中での点結びのための見直し作業を、
都度教えなければならないのだけれども、ほとんどそれがされないのが現実。

だから、君を擁護するわけじゃないけれど、
この作業を経験させてもらえないことには、理解できなくて当たり前なのね。

君が、今、中学生ならラッキー！
今から学校で習う因数分解も、今までに習っただろう因数分解も、
この講座を読めば、全体の中でのポジションが分かるから、
多分、高校で習う分も理解して覚えちゃうかもしれない。

ここで、重要なことをお願いしておくね。
「今、まだ習っていないから」で放置したり無視したりして済ませないでほしい。

まだ習っていないことであっても、
少なくとも、そのイメージだけでもよいから目を通しておくこと。
今習っていることやすでに知っていることは、もちろんだけれど、
全体の中でどのポジションなのかをとにかく感じてほしいわけね。
そして、実際に習ったときには、再びこの講座を見直して欲しいんだ。

「行ったり戻ったり」が、数学の理解にとってはどれほど大切なことかは、
実際に「行ったり戻ったり」した者だけにしか分からない。
中高一貫校の進学校の生徒の偏差値が高いのは、ひとえにここに理由がある。

君が、公立高校の生徒なら、「今習っていないから」という理由で、全く目も通さない、
手もつけないという気持ちなら、決して彼らに勝つことなどできない。

「自分独自の勉強タイム」で 3 年間のことを 2 年間で一通り済ませ、
残りの延べ 1 年間は、この点と点を繋げる作業に充てるという気持ちで
臨まない限りは、決して数学は君の傍には寄ってこない。
このことだけは肝に銘じておいたほうが良いね。

とにかく、数学は、種々の関数にしたって、複素数にしたって、微積分にしたって、
どの単元をこなすにも、常に必要とされるのが「式を変幻自在に操れる」という力。
この能力を身に付けないと、数学は苦痛の連続でしかなくなることは間違いない！

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：二階から因数分解　～何故、変幻自在に数式を扱えないのか？～

従って、一番最初で習う「数と式」は最も味気のないところでありながら、
全てのツールの故郷はここにあると言っても過言ではないのね。
それほど重要な能力の原点が「因数分解や式の変形」にはあるわけさ。
だから、ことあるごとに、常に立ち戻ってほしい。

そうやって、立ち戻っては、その意味や習っている所との関連性を確認することが、
しっかりと「式を操る基本トレーニング」を積んでいるということになるんだね。

たったそれだけのことで、数学に対する能力は確実に飛躍的に上がる！！

「式の展開や因数分解」「式の変形」を学ぶにあたって、
最大のキーワードは「規則性」と「方程式との関連性」
この 2 点さえ掴んでいけば、式を変幻自在に操れるようになる。

この講座では、「規則性」や「方程式との関連性」で、
「式の展開や因数分解」の全体を眺めてもらうことになる。

一通り眺めた後、君は、
「公式なんて、ほとんど覚える必要ないじゃん」
あるいは、
「公式なんて忘れてもへっちゃらじゃん」
と思ってしまう自分自身の変化に驚くだろう。

もし、今、君が「因数分解がどうもうまくできない」とか
「式を自由に操ることができない」と悩んでいるなら、
「規則性」「方程式」というメガネを通して
数式を眺めることを教えてもらわなかったから。
そう言っても過言ではないことを感じてもらえるだろう。

次の第 1 章は、理屈抜きで規則性を感じてもらうためにある。
教科書や参考書に載っている因数分解や式の展開の公式をピックアップし、
その規則性で綺麗に並べてみることにするね。

感じよ！
まず最初は、ただひたすら感じてもらえばいい！

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：二階から因数分解　～何故、変幻自在に数式を扱えないのか？～

最初に、因数分解をするための具体的な方法をまとめると、
おおむね下記のように、どの参考書にも書いてある。

1) まずは共通因子をくくり出して整理する。
2) 一つの文字について整理する。
　その際、次数の低い文字について整理すると簡単になる場合が多い。
3) 頻繁に出てくる 2 次 3 項の式はたすき掛けする。
4) 因数定理を使う。
5) 知っている公式の形に持ち込む。
6) 対称式・交代式の性質を利用する。

この講座でも、これらのことは途中でも当然のように出てくるが、
第 9 章で定石としてまとめることにする。

まず最初に、一番大きな柱となるお話をしておくと、
「中学はここまで、高校はここから」
「数と式はここまで、方程式はここから」なんてことではなく、
少なくとも、式の展開と因数分解は全体の流れの中で見つめることが大切なのね。

そのキーワードは、「規則性」
ややこしそうな公式と言えども、
規則性があるということの中で見つめれば、一挙に視界が開けてくる。
そして、誰でも分かりやすく見えてくる。

この「規則性」があること自体、
高校を卒業したどれだけの生徒が知っていることだろうか？

規則性があるということだけでも知っていれば、
彼らも、式に対するアレルギーは消え失せて卒業していったことだろうに・・・。

従って、この講座では、「式の展開と因数分解」を「規則性」という太い柱の中で
理解してもらう。
おそらく、「規則性」という大きな流れから鳥瞰した参考書はほとんど無い！
そして、ネットにある多くの指導を見ても、単体の解説に過ぎないものがほとんど。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：二階から因数分解　～何故、変幻自在に数式を扱えないのか？～

では、この講座の大きな流れを最初に説明しておくね。

第 1 章では、まず最初に、
　展開・因数分解の公式や頻出の準公式などの「規則性」を感じてもらいます。
　この章では、ひたすら感じることだけが目的です。

第 2 章では、「因数分解をするのは何のため？」ということを通して、
　方程式との接点という場所から「因数分解や式の変形」を、
　簡単な例を通して軽く眺めてもらいます。
　2 次方程式を習っていなくても、恐れずに読み進めてください。

第 3 章では、方程式と因数分解の深い仲を掘り下げます。
　因数定理・解と係数の関係・解の公式との深い繋がりから因数分解を理解する、
　メインモチーフの部分です。
　次に予定している「2 次関数・2 次方程式」講座と大いに重複するところにもなります。
　お互いの相関関係が相関ツリーではっきりと意識化されることでしょう。
　この瞬間、君の高校数学の幹は出来上がったとさえ言えます。

第 4 章では、第 1 章で感じてもらった、展開・因数分解の公式や頻出の準公式などの
　「規則性」を詳しく眺めていくと同時に、各式間の「交流性（間柄）」という視点も
　付加して大きく全体を眺めてもらう、もう 1 つのメインモチーフの部分です。
　式の展開や因数分解には規則性があり、その規則性を眺めていけば一望千里！
　無味乾燥と思える式の展開や因数分解が、全体から見渡すことによって、
　一挙に、なんと簡単なことに見えてくるでしょう！

第 5 章では、第 4 章の「規則性」を眺める中で出てきた、「二項定理」について理解します。
　次いで、「二項定理」の係数をシンプルに求める「パスカルの三角形」と、
　さらに一般的な次元にまで拡張した「多項定理」を理解します。

第 6 章では、因数分解と 2 次方程式を、１つの例題を通して徹底的に理解します。
　第 3 章の補完・補強的要素の章となりますが、
　この時点で、2 次方程式の代数的処理の部分もほぼ完成という域になります。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

序章：二階から因数分解　～何故、変幻自在に数式を扱えないのか？～

第 7 章では、因数分解では最も厄介な「多文字の因数分解」に関する公式
を理解します。
この章では、これらの公式が成立する証明を、
オーソドックスな定石の方法で理解しておくことを目的とします。

第 8 章では、「多文字の因数分解」の一つとして、因数分解の天王山とも言える
対称式と交代式の持つ性質の美しさとシンプルさを理解してもらいます。
対称式は、1 つの重要例題からじっくりと紐解きます。
交代式は、その因数分解をいくつかの例で説明します。

交代式はマジック的要素が強く、理解すれば面白いように解けるようになりますから、
チャート式で交代式の問題をチョイスして全部挑戦されてもよいでしょう。
おそらく、それがきっかけで数学上達への一挙の弾みになることすらあるかも
しれないほどモチベーションが上がる可能性が潜んでいます。

第 9 章では、教科書や参考書にも載っている「因数分解するための定石」について、
例を交えながら、重要ポイントを言葉として残していきます。

第 10 章では、本講座全般を通して、「数学センスを磨く重要ポイント」を、
例を挙げながら言葉としてもとめていきます。

第 11 章と第 12 章では、発展問題と挑戦問題を各 4 題出題してあります。
もちろん、脳細胞の働かせ方という視点から、分かりやすくそのプロセスを
追った解答例が付属しています。
まずは、自力で考えてみるトライをここではして欲しいと願います。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第１章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～

この章では、まず、

式の展開や因数分解に潜んでいる「規則性」を感じてもらう

ことが目的です。

その「規則性」に関する詳しい説明は、第４章にてじっくりとしますので、
今は、とにかく感じてもらうだけで結構です。

何故なら、その前の第３章で、因数分解と密接な関係にある
因数定理や方程式の基礎知識を固めてもらった方が、
よりいっそう理解しやすくなるという理由からです。

そして、第４章では、「規則性」という視点からだけでなく、
式相互間の間柄、すなわち「交流性」という視点からも眺め、
式の変形の全貌を掴んでもらおうと思います。

[＊注記＊]
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$のように薄緑で色付けしてあるのは、
教科書や参考書からピックアップした公式です。

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$
のように黄色で色付けしてあるのは、一般的な規則性を表した式です。

$x^2-1=(x-1)(x+1)$のように青で色付けしてあるのは、
準公式または頻出の活用式を表しています。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 1 章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～

1）因数分解の公式をピックアップ

まずは、教科書や参考書に載っている因数分解の公式をピックアップしてみるね。
重要で、且つ、頻繁に利用されている公式は、たかだか下記の程度なんだよ。

公式 12m：$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

公式 13p：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

公式 13m：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

公式 22p：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

公式 22m：$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

公式 23p：$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

公式 23m：$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

公式 2np：$\sum_{r=0}^{n}{}_nc_r a^{n-r}b^r=(a+b)^n$ ・・・二項定理（第 5 章）

公式 25nm：$\sum_{r=0}^{n}{}_nc_r a^{n-r}(-b)^r=(a-b)^n$

「規則性」に関しては、この後すぐに感じてもらうけれど、
ここでは、一つだけコメントしておくね。

> **右の公式は、左の公式において b を $-b$ と置き換えれば自然に出てくる！**

[公式 12m]と左の 3 つの公式だけが、全ての基礎になっていると言えるんだね。
「符号はどっちだったっけ？」なんて友達と言い合っていること自体、
「私は公式を意味も分からず暗記しています」と言いふらしているようなものなんだよ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 1 章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～

2）因数分解の公式を「規則性」で感じる

[規則性 1m]　a^n-b^n の規則性

$a-b$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$　・・・[公式 12m]

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$　・・・[公式 13m]

$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$

・

・

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$

どうかな？

感じてもらえただろうか？この規則性。

4 次式は、ちょっと普通の因数分解とは違うけれどね・・。

厳密に言えば、因数分解はまだしきっていない式になっている。

でも、ここまで並べれば、

$a^7-b^7=?$　と問われても、君ならば、もう予想できるんじゃないか？

この規則性は、第 3 章を理解してから、第 4 章でさらに深めていくね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 1 章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～

[規則性 1p]　a^n+b^n の規則性

$a+b$

$a^2+b^2=(a+b)(a-b)+2b^2$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　・・・[公式 13p]

$a^4+b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)+2b^4$

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$a^6+b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)+2b^6$

・

・

n が奇数のとき

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})$

n が偶数のとき

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-a^2b^{n-3}+ab^{n-2}-b^{n-1})+2b^n$

どうかな？

感じてもらえただろうか？この規則性。

偶数乗＋偶数乗は、因数分解とはなっていないけれどね・・。

でも、ここまで並べれば、

$a^7+b^7=?$　と問われても、君ならば、もう予想できるんじゃないか？

この規則性は、第 3 章を理解してから、第 4 章でさらに深めていくね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第１章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～

[規則性 1mx]　x^n-1の規則性・・・[規則性 1m]の頻出タイプ

$x-1$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$　・・・[頻出 12m]

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$　・・・[頻出 13m]

$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

・

・

・

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$

どうだい？

実に分かりやすいね！この規則性。

[規則性 1px]　x^n+1の規則性・・・[規則性 1p]の頻出タイプ

$x+1$

$x^2+1=(x+1)(x-1)+2$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$　・・・[頻出 13p]

$x^4+1=(x+1)(x^3-x^2+x-1)+2$

$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$x^6+1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)+2$

・

・

・

n が奇数のとき

$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+x^2-x+1)$

n が偶数のとき

$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots-x^2+x-1)+2$

どうだい？

実に分かりやすいね！この規則性。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第１章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～

[規則性 2p]　$(a+b)^n$ の規則性と a^n+b^n との間柄

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$　・・・[公式 22p]

単に、$a^2+b^2=$ の形に変形した式　→→→　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$　・・・[公式 23p]

単に、$a^3+b^3=$ の形に変形した式　→→→　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=(a+b)^4$

・
・
・

$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r}b^r=(a+b)^n$　・・・[公式 2np]

[規則性 2m]　$(a-b)^n$ の規則性と $a^n\pm b^n$ との間柄

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$　・・・[公式 22m]

単に、$a^2+b^2=$ の形に変形した式　→→→　$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$　・・・[公式 23m]

単に、$a^3+b^3=$ の形に変形した式　→→→　$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4=(a-b)^4$

・
・
・

$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r}(-b)^r=(a-b)^n$　・・・[公式 2nm]

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第１章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～

3)準公式やその他の公式

規則性を見る中でも出てきたが、公式を単に変形したような形の式など、
「式の変形」として準公式のように載っているものがたくさんある。

例えば、

準公式 a：$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ・・・単に[公式 22p]の変形

準公式 b：$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ ・・・単に[公式 22m]の変形

準公式 c：$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ ・・・[準公式 a]　＋ 準公式 b で出る式

準公式 d：$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ ・・・[準公式 a]　－　準公式 b で出る式

あるいは、$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

準公式 e：$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ ・・・単に[公式 23p]の変形

準公式 f：$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ ・・・単に[公式 23m]の変形

右のコメントのように、単に基本公式の変形に過ぎないし、
準公式同士の足し算や引き算で出てくるものだから、
機械的に暗記しようなんてことは、実にナンセンスなことなんだね。

しかし、このページにまとめた「公式の変形」はものすごく大事なところ！

基本公式をいろんな形に姿を変えさせる訓練をすることが大事ということさ。
訓練と言っても、訓練自体は別に骨が折れる訓練でもない。
右のコメント見れば、すぐに出てくる式だものね。

要は、公式も姿を変えさせれば、一挙に問題の本質が見えることも
あるってことを、問題を通して経験する訓練が大切だってことなんだ。
その訓練だけが、「準公式」という意識さえ自然に取り払ってくれることになる。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第１章：公式を追うものは規則性を見ず　～公式はまず規則性で感じよ！～

さて、最後に３文字の公式があるね。
これは、君には悪いけれど、下記にピックアップした中で
最初の公式と最後の公式を除いては、「一筋縄ではいかない！」と言っておこう。

第７章と第８章で多文字に関する因数分解と対称式・交代式として説明するけれども、
美しい法則性があるとは言え、その公式の導出には、なかなか大変なものが多い。

公式 32a：$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)$

公式 32b：$2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$

公式 33：$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

公式 34：

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)$$

公式 44：$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 2 章：敵は方程式にあり　～君は、何のために因数分解するのか？～

たいていの子は、こう思うんだね。
「何のために 因数分解をするのか？」と・・・。
君もそうではないかな？

もちろん、「自分にとって」とか「将来にとって」なんて考えると、
「生きるにあたっては因数分解は何の 実益 もない」というのが答えなんだな。
実際、理系の人でも社会に出てから因数分解をする人は、まず居ないと思うね。

そういう話になると、半分の人は「無意味なものはやる必要がない」と答え、
残り半分の人は「無意味だけれど、やっておくことは形を変え役に立つ」と答える。

ここでは、そういうことではなく、
数学をする上で、「何のために 因数分解をするのか？」
という実務的な視点だけで、ちょっとまとめておくね。

結論から言うと、
1. 方程式を解くため
2. 数学的な論理を解明していくため（原子や電子、素粒子を解明していくのと似ている）
といったようなところになるだろうか。

今の君にとって、最も大きな理由は 1 ってところになるかな。

「因数分解とは、多項式を、よりシンプルな多項式の積の形で表す」ことだから、
多項式＝0 という方程式の解が、因数分解によって、いとも簡単に求めることができる
ということになるからなんだね。

中学・高校数学を通じて最も基本になる 2 次方程式で具体的に説明してみようか。

例えば、2 次方程式 $x^2-4x+3=0$ を解かねばならない場合、
このままでは、値をあてずっぽうに当てはめて探していかねばならないという
ことになるね。

が、この式を因数分解しておくと、積の形 $=0$ という形で表されるわけだから、
$p\times q=0$ を解きなさいという問題に帰着することになるんだね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 2 章：敵は方程式にあり　～君は、何のために因数分解するのか？～

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$ と因数分解されるから、
$x=1$ と $x=3$ が解になることが、すぐに出てくるというわけね。
因数分解していればこそ、すぐに解が出る！

【p か q のどちらかが 0 であれば、$p\times q$ は必ず 0 になる】
【$pq=0 \Leftrightarrow p=0 \quad or \quad q=0$】
積の形で式が表せれば、簡単に解けるという単純な理由があります。

即ち、因数分解というものは、
方程式を解く上での有用な一つの方法ということができるわけなんだ。

従って、因数分解は、方程式に関する代数的真実とともに、
系統的にセットで理解していくのが最も合理的と言えるんだよ。

ところで、君が 2 次方程式をすでに習っているとすれば、
2 次方程式の解き方としては、次のような方法があることを
理解していることと思うのだけれど、どうだい？

①因数分解で解く方法
②完全平方の形に変形して解く方法（平方完成）
③解の公式を使って解く方法

どの方法が偉いというものでもないんだよ。
でも、同じ頂上を目指しているのに、そのどれもが風景が違って見えます。
アプローチするルートが違うから当然なんだね。

高校生の君なら、普通は①か③を使って解いているよね。
中学生の君なら、①か②を使って解いているのではないかな？

①と③の方法は代数的な方法で、直接的にはイメージに繋がりにくいものだね。
そして、機械的に公式にあてはめていけば解けるというルートでもある。
それだけに、反面、自分が何をしているのかが掴みにくいとも言えるんだね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

①の場合は、
【p か q のどちらかが 0 であれば、$p \times q$ は必ず 0 になる】
という数学的な真実を利用しているということで、
比較的、理解はしやすいかもしれない。

が、③の解の公式となると、ともかくもこれに当てはめれば良いという
ことで済んじゃう。
因数分解とは何の関係も無い全く別物として考えている子も居るだろうね。

実は、【二次方程式の解の公式】自体も、次の第 3 章で説明する
【解と係数の関係】から、ものの 10 秒で導き出せる公式だし、
その【解と係数の関係】を満たすような解を簡単に見つけることが
因数分解の「たすき掛け」に他ならないという親戚関係にあるんだよ。

この辺りも次章でしっかり理解してくれれば、公式を覚えるプレッシャー
からも開放されると思うよ。

一方②の方法は、最も直截にイメージに直結する方法だね。
方程式の解が、二次関数即ち放物線のグラフと直線との交点という視覚
として与えられるので、一目瞭然で意味がつかめるというわけなんだね。

だから、一度は、同じ方程式をそれぞれの方法で筋道を掴んでみることが、
2 次方程式を理解する上では重要なポイントになるね。

意外に、一つの 2 次方程式を違うアプローチで並べてみるという作業は
したことがないんじゃないかな？
数学では、並べて比較するという作業ほど分かりやすくするものはない
ということを少しずつ感じてもらえればと思うわけね。

で、簡単な例だけれど、1 つの 2 次方程式でのそれぞれのアプローチを見ておこうかね。

[具体例]
2 次方程式 $x^2 - 4x + 3 = 0$ を解け

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 2 章：敵は方程式にあり　～君は、何のために因数分解するのか？～

①因数分解で解く方法

左辺を因数分解すると、$(x-1)(x-3)$
よって、解は$x=1,3$

そこで、第 3 章では、因数定理や解と係数の関係・解の公式などと絡めて
眺めていくことにしましょう。

②完全平方の形に変形して解く方法（平方完成）

左辺を完全平方の形に変形する。

$$x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1=0$$

よって、$(x-2)^2=1$

$$\therefore\ x-2=\pm 1$$
$$\downarrow$$
$$\therefore\ x=1,3$$

③解の公式を使って解く方法

2 次方程式の解の公式により、

$$x=2\pm\sqrt{2^2-3}=1,3$$

まさか、因数分解がサクっと出来ちゃうのに、
わざわざ解の公式を使う子も居ないだろうけれど、別に使って悪いことは何もないよ。

通常は、サクっと因数分解するのが難しいときに、解の公式を使うと便利だし、
必ず解が出てくる！

実際の問題にあたっては、何を使って解けば合理的なのかは、実践経験を積むことにより、
ある程度、状況に応じて自然にチョイスできるようになるよ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

と言うより、

2 次方程式を解く問題や、それに関連する問題では、

・因数分解ができそうかどうか？
　↓
・できそうでなければ解の公式を使ってやろうか？
　↓
・いや、これはまず、グラフを描かないと分かりにくいかも！

というような脳細胞の働きが徐々にできていくはずなんだね。

実際に、2 次方程式なら、全ての問題はこれで事足るんだ。
グラフから見る 2 次方程式は、別講座「2 次関数・2 次方程式」にて説明するよ。

この章では、2 次方程式を例にして、
因数分解というものは、
方程式を解く上での有用な一つの方法ということができる。
ということを見てきたが、方程式は 2 次方程式だけじゃない。
3 次だって 4 次だってある。

そんな、高次の方程式になれば、
なおさら因数分解が効力を発揮することになってくるんだ。
その場合は、さらに「因数定理」という便利なツールに参加してもらうことに
なるんだがね・・・。

だから、先ほども言ったように、
因数分解は、方程式に関する代数的真実とともに、
系統的にセットで理解していくことが最も合理的と言えるし、
第 1 章で感じた「規則性」を理解する上でも、
次の第 3 章の「方程式と因数分解」が基本になる。

じっくりかみ締めながら眺めてみてくれたまえ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章：犬も歩けば因数に当たる？　～方程式と因数分解の秘密な関係～

「何のために因数分解するのか？」の一つの大きな理由として、
「方程式を解くため」ということは分かってもらえただろうか？

そこで、因数分解を理解する上でも、方程式を解く上でも重要な鍵を握る
「因数定理」について、まず理解しておいてもらおう。

1) 因数定理

「因数定理」は、あまりにも有名な定理なんだね。

> **多項式 $f(x)$ に関して、 $f(a)=0$ となる a が存在すれば、**
> **$f(x)$ は $(x-a)$ を因数に持つ。**

もっと、噛み砕いて言えば、

> **与えられた多項式 $f(x)$ で x に a を代入して、値が 0 になる**
> **ならば、 $f(x)$ は $(x-a)$ を因数に持つ。**

別段、難しいことは何もない定理だろう？
けれども、方程式の解を求める方法の一つとしてなくてはならないんだ。
特に、3 次以上の高次方程式の場合に、とても役に立つことになる。

ここで、いきなり $f(x)$ という記号が出て来るんだけれど、
この $f(x)$ が、以外に分かっていないケースが多いんだね。

これは、別講座で「関数とは？」を予定しているので、
そこで、詳しく説明しようと思っているのだけれども、結論はシンプル！
今は、「関数とは、なんらかの演算をする装置」という風に考えておいて。
x という材料を投入したら、その材料を使って、決められている演算 $f(\ function)$
によってアウトプット $f(x)$ を出す装置だと考えておけば良いね。

では、最初に、小学校の割り算を思い出してもらおうか。

30 割る 7 は答え 4 余り 2
式で書けば、 $30\div 7=4$・・・余り2
余りは、割る数 7 より小さいはずだね。
これを、逆向きに書けば、 $30=7\times 4+2$ **だったね。**

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章：犬も歩けば因数に当たる？　～方程式と因数分解の秘密な関係～

さて、中学生になり、数が式になりました。
でも、ある式を別のある式で割るということは、
理屈は、数と同じように考えればいいだけなのね。

ある式 $f(x)$ を別のある式 $g(x)$ で割ることを考えてみようか。

数の場合と同じように考えて、
$f(x) \div g(x) = Q(x)$・・・余り $R(x)$
逆向きに書けば、 $f(x) = g(x) * Q(x) + R(x)$ となるね。
$R(x)$ は、割る式 $g(x)$ よりも次数が低くなる。

ここで、割る式 $g(x)$ が、2 項の一次式（例えば、 $x - a$ ）だとすれば、
余り $R(x)$ は、割る一次式 $g(x)$ よりも次数が低い、すなわち定数になる。
だって、 $R(x)$ が一次式だったら、
「まだ割れるぜ！君の怠慢だ！」ってことになるからね。

このことから、
多項式 $f(x)$ を、2 項の一次式 $(x - a)$ で割ったとき、余りは定数 r となる。

すなわち、 $f(x) = (x - a)Q(x) + r$ となるということ。

ここで、 $x = a$ のときを考えてみようか。
$f(a) = (a - a)Q(x) + r = r$　となるね。

$(x - a)$ で割ったときの余り r は、
多項式 $f(x)$ において、 $x = a$ としたときの値 $f(a)$ に他ならないということ。

この真実を、『剰余定理』と申し上げるんだ。

すなわち、『剰余定理』とは、

> 多項式 $f(x)$ を 2 項の 1 次式 $(x - a)$ で割ったとき、余りは $f(a)$ となる。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章：犬も歩けば因数に当たる？　～方程式と因数分解の秘密な関係～

では、余りが出ないとき、すなわち割り切れるときはどうかな？

$f(x)=(x-a)Q(x)$ で表せるということだから、

言い方を変えれば、

多項式 $f(x)$ において、$x=a$ としたときの値 $f(a)$ が 0 であれば、

$f(x)$ は因数分解ができて、且つ、$(x-a)$ を因数に持つということね。

すなわち、**『因数定理』**とは、

『剰余定理』において剰余 $f(a)$ が 0 になる場合のことに他ならないわけね！

> 多項式 $f(x)$ において、$f(a)=0$ となる a が存在すれば、$x-a$ を因数に持つ。

別の表現をすれば、

> 多項式 $f(x)$ が $(x-a)$ で割り切れれば、$f(a)=0$

『因数定理』は、ややこしい高次の多項式などで、

まず 1 次式の因数を見つけてやるのに非常に便利だというわけで、

大変、重宝な定理だから頻繁に使われる。

もちろん、二次式の因数分解だって、タスキがけで探す方法だけでなく、

因数定理で探す方法を使っても構わないね。

[具体例 1]

$f(x)=x^2-a^2$ のとき、

x に a と $-a$ を入れてみようか。

$f(a)=a^2-a^2=0$ だし、$f(-a)=(-a)^2-a^2=0$ と、ともに値が 0 になるね。

だから、$(x-a)$ を因数に持ち、また、$(x+a)$ も因数に持つ。

ということは、$(x+a)(x-a)$ を因数に持つということだね。

$f(x)$ は 2 次式で、$(x+a)(x-a)$ も 2 次式だから、

これ以上の因数はなくて、あとは符号と係数だけがつじつまが合うようにしてやればよい。

x^2 の係数を見てみると、$f(x)$ も $(x+a)(x-a)$ もともにプラスで係数は 1 だから、

そのまま等号で結べば良いことになる。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

$f(x)=(x+a)(x-a)$
$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$というような公式も、因数定理から軽く導き出せた！

[具体例 2]
$f(x)=x^3-1$を因数分解せよ。
$f(1)=1^3-1=0$だから、$f(x)$は$(x-1)$を因数に持つ。

よってに、$f(x)$を$(x-1)$で割って計算すると、
$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$というような公式も、因数定理からも導き出せた！

ここまでの例は、因数分解の公式も「因数定理」を使えば、
その場で分かっちゃうってこと。

[具体例 3]
$f(x)=x^2-4x+3$を因数分解せよ。
$f(1)=1^2-4+3=0$だから、$f(x)$は$(x-1)$を因数に持つ。

よってに、$f(x)$を$(x-1)$で割って計算すると、
$f(x)=(x-1)(x-3)$

このように、普段、頻繁に試験問題に出るような 2 次式の
因数分解の問題も因数定理でできるのね。

でも、因数定理を使ってやる人って少ないよね。
たいてい、たすき掛けで因数分解してるんじゃないかい。
さらにさらに、2 次方程式の場合だと、解の公式もあるから、
それに当てはめてもできてしまう。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章：犬も歩けば因数に当たる？　～方程式と因数分解の秘密な関係～

ここからは、実際の問題っぽい例で考えていくよ。

[具体例 4]

$f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$ は $(x+1)$ を因数に持つ。

何故なら、

$f(-1)=3(-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+2=0$ だから。

実際に、$(x+1)$ で割って計算してやると、因数分解ができる。

$$\begin{aligned} f(x)&=3x^3-4x^2-5x+2 \\ &=(x+1)(3x^2-7x+2) \\ &=(x+1)(x-2)(3x-1) \end{aligned}$$

だから、$3x^3-4x^2-5x+2$ を因数分解しなさいと問われたときは、
たすき掛けで出来る 2 次式ではないし、3 次方程式ともなると
解の公式は、非常に難解だから高校数学でも習わないから知らないしね。

そんなとき、因数定理を使えば、まずは次数を減らして 2 次方程式に
持ち込むことができるので非常に便利なツールとなるんだね。

[具体例 4'］

[具体例 4]は、実際の問題としては、
「$3x^3-4x^2-5x+2$ を因数分解しなさい。」と与えられるね。

実際のプロセスで説明していこうか。
この問題なら、3 次式だから、まずたすき掛けで考えることのできる
2 次式に持ち込みたいと思うよね。

そうなると、便利なのが、因数定理を用いて、とりあえず 1 次の因数を
求めてやればという発想になる。

このとき、$3x^3-4x^2-5x+2$ は x に関する 3 次の多項式だから、
これを $f(x)$ と置いてやる。
これで、$f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$ となったわけだ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第３章：犬も歩けば因数に当たる？　～方程式と因数分解の秘密な関係～

「因数定理」により、
多項式：$f(x)$について、$f(a)=0$であれば、$(x-a)$を因数に持つので
$f(x)$のxに適当な数値を代入して、$f(a)=0$となるものを探せば良いことになる。

ここは、たすき掛けと同じように自分で探していかなければならないのね。
ここでは、早く探せる人と、少し時間がかかる人の差は出てくるけれど、
これは、ある程度の慣れで勘が培われている人が有利になるよ。

でも、所詮、整数の範囲で探す場合がほとんどだから、
あまり気にすることなく、とにかく経験を積めば、
大なり小なり勘が養われてくると思うよ。
たすき掛けも同じだけれどね。

とは言っても、
やみ雲に探しても徒労に終わるということを、この機会に知ってもらうね。

ポイントは、とにかく式の係数に注意するということなんだ！

まずは、この例題で、単純に流れを掴んでね。

$f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$における式の係数は、$3,-4,-5,2$だね。
↓
もし、単純に足して0になる場合は、最も簡単。
xに1を代入すれば、$f(x)=0$になるパターンということになり、
$(x-1)$を因数に持つことが、すぐに分かる。
↓
この例の場合は、ダメだった。
単純に足して0にはならない。
↓
ここで、符号がマイナスの整数を代入してみる場合を想定すると、
偶数乗の係数は、ひっくり返ることはないけれども、
奇数乗の係数は符号が逆になる！
↓

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

そのまま、奇数乗の係数だけをひっくり返して並べてみると、
$-3,-4,5,2$ となるね。
単純に足してみると、0 になることが分かる。
↓
そうすると、1 ではなく -1 を入れれば、$f(x)=0$ になることが、
あっさりと分かってしまった。
これで、$(x+1)$ を因数に持つことが分かったことになる。
↓
同じようにして、x に 1 を代入してダメなことが分かった後、
x に 2 を代入してみようとする子もいるはずだね。
果たして、こちらも $f(x)=0$ になることが分かる。
これで、$(x-2)$ を因数に持つことが分かったことになるね。
↓
でも、これじゃ、ある意味、偶然に見つかったとは思わないか？
目くら滅法に x の数字を入れていっても良いものなのかね？

実は、因数分解できた結果から逆に考えていくと、
どんな数を当てはめて調べていけば良いかが分かるんだな、これが。

方針もなしに、目くら滅法に当てはめていくよりは、
無駄な作業は省けるから、以下のことを知っておいてね。
これを知り理解しておくことが、数学センスそのものになるんだよ。

$f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$ が 1 次式 3 つの積の形に因数分解できたと想定すると、
（因数分解する前は、どんな形になるか分からない）
$(ax+b)(cx+d)(ex+f)$ という形ということだね。
↓
$f(x)=0$ となる x を探し出すということは、
$x=-\dfrac{b}{a}$ or $x=-\dfrac{d}{c}$ or $x=-\dfrac{f}{e}$ のどれかを探し出すということだね。
↓
ここで、与えられた式において、
3 次の係数が 3 であることから、a,c,e のどれか 1 つは 3 であるはずだ。
また、定数項が 2 であることから、b,d,f のどれか 1 つは 2 であるはずだ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

分かるかい？

と言うことは、当てはまる x は、どの場合も、

$x=-\dfrac{1\text{か}2}{1\text{か}3}=\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次（例では3次）の係数の約数}}$ **しかあり得ない！**

ということになるんだね。

だから、この場合 $1,-1,2,-2,\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}$ **以外の数を、**

いくら当てはめて探しても、それは徒労だということになってしまうんだよ。

このことで、素晴らしいことが分かったよ！
中には、意地悪にも、整数を当てはめても見つからないようにしてある問題
もあるのだが、このこと知っていれば、分数だって見つけることができるんだね。
整数を、あてずっぽうで当てはめて、普通の問題が解けていた子も、
意地悪問題になると見つけられない現象がここで起こっていたんだ！

さて、
$f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$ **は、1 次式 3 つの積の形に因数分解できたけれど、**
1 次式と 2 次式の形までしか因数分解できない場合もあるんだ。
そのときは、 $(ax+b)(cx^2+dx+e)$ **という形だね。**

先ほどの例と比べると、 $f(x)=0$ **になるような** x **は、**

$x=-\dfrac{b}{a}$ **しか見つけられません　というだけが違いになり、**

理屈は全く同じだね。

$x=-\dfrac{1\text{か}2}{1\text{か}3}=\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次（例では3次）の係数の約数}}$ **しかあり得ない！**

これで、因数定理は、君のものになったはずだ。
あとは、経験を積んでほしいだけね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章：犬も歩けば因数に当たる？　～方程式と因数分解の秘密な関係～

2)方程式と因数定理と因数分解

方程式を解けと言われたとき、いろんな解き方が考えられるね。
その解き方がどのような根拠から出ているのか、
その中での因数分解の位置を系統的にツリー構成で眺めてみるよ。

①まずは、最も基本となる 2 次方程式で見てみよう。

2 次方程式を解け

||

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ に解が存在し、
その解を α,β とするとき、α,β を求めよ。

⇓

因数定理

⇓

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は $(x-\alpha)(x-\beta)$ に因数分解できる。

⇓

$x^2+ax+b=0$ を満足する α 又は β
又は α,β を探し、
因数定理により因数分解をして解く

⇓

これを満足する α,β を
手作業で探すことが「たすき掛け」

⇓

たすき掛けで因数分解して解く

⇓

係数比較で 2 次方程式の解と係数の関係が導出される。（後述）

$\alpha+\beta=-a$

$\alpha\beta=b$

⇓

因数分解の公式を変形利用すれば、
2 次方程式の解の公式が導出される。

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

$$\beta=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

⇓

2 次方程式の解の公式に当てはめて解く

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

このツリー構成を、もう少し詳しく説明すると、

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が解 α,β を持つとはどういうこと？

↓

x^2+ax+b が $(x-\alpha)(x-\beta)$ に因数分解できること。

↓

なら、x^2+ax+b は $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ に等しいということ。

↓

この 2 式を係数を比較することによって、

$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=b\end{cases}$ **という【解と係数の関係】が導かれます。**　　**←重要ポイント**

↓

二次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解を求めるとは、
足して $-a$、掛けて b となるような２つの実数を求めることに他ならない。

↓

これは、たすき掛けによって x^2+ax+b を因数分解する作業と同値である

即ち、
「2 次方程式が実数解を持つということは、与えられた 2 次式が
実数の範囲で因数分解できる」と言い換えることができます。
（高校 2 年生では、「虚数」という数が出現し、定義されることにより、解がない場合でも因数分解は出来るというさらに拡がった世界に入ることになりますが、常識的な因数分解という意味でここでは虚数を考えないリアルの世界として話をします）

因数分解できないときはどうするの？

●二次方程式の $x^2+ax+b=0$ における解の公式の導入

方程式の２つの解を α,β とすると、

$(x-\alpha)(x-\beta)$ に因数分解できることだったから、

$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=b\end{cases}$ **という「解と係数の関係」が自然に導かれた。**

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

ここから、α,β をそれぞれ求めておくことができれば、
公式として便利だねということになる。

嫌と言うほどよく利用する式

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$　**を利用する。**

この式は、当たり前すぎて、公式とまでは言われていませんが、
みっちり理解しいつでも使えるようにしておかねばならないほど重要で便利な式ね。

「解と係数の関係」を、そのままこの式に当てはめるよ。

$(-a)^2-4b=(\alpha-\beta)^2$

$(\alpha-\beta)^2=a^2-4b$

よって、

$\alpha-\beta=\pm\sqrt{a^2-4b}$

$\alpha+\beta=-a$

辺々たすと、

$2\alpha=-a\pm\sqrt{a^2-4b}$

$\alpha=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

と解の公式が出来上がるというわけね。

β **は単に** $\beta=\dfrac{-a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}$ **と符号が逆に変わるだけのお話。**

なんと、2 次方程式の「解の公式」も、もとを正せば、
因数分解の公式のおかげで導き出せたと言えるね。

この章では、2 次方程式に関する半分のこと（代数的）も、すでに説明できちゃった！

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章：犬も歩けば因数に当たる？　～方程式と因数分解の秘密な関係～

ここで、教科書や参考書には一般的に、
二次方程式の $ax^2+bx+c=0$ における解の公式の導入
として与えられるね。
x^2 の係数が 1 ではなく a となっている、即ち、一般的な 2 次方程式の形だ。
数学は一般的な形で述べられなければならない。

だが、$ax^2+bx+c=0$ の両辺を a で割ってやるとどうか？

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ となり、形としては $x^2+ax+b=0$ と全く同じになる。

●二次方程式の $ax^2+bx+c=0$ における解の公式の導入
方程式の２つの解を α,β とすると、

$(x-\alpha)(x-\beta)$ に因数分解できることだったから、
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ということになり

$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}\end{cases}$ という解と係数の関係が導かれる。

先ほどと同じように、解の公式は

$\alpha=\frac{-b\pm\sqrt{(-b)^2-4ac}}{2a}$ が導かれる。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

②次は、3 次方程式で見てみよう。

3 次方程式を解け

||

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ に解が存在し、
その解を α,β,γ とするとき、α,β,γ を求めよ。

⇓

因数定理

⇓

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ は $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ に因数分解できる。

⇓

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$
を満足する α を探し、因数定理により
因数分解をして、まず次数を減らす。

⇓

$(x-\alpha)\times(x\text{の}2\text{次式})$

⇓

1)の 2 次方程式を解く流れ

⇓

係数比較で 3 次方程式の解と係数の
関係が導出される。（後述）

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

⇓

3 次方程式の解の公式は高校の範囲
では難解

では、これらの知識を理解した上で、
再度、「式の展開と因数分解」の規則性をじっくり眺めてみることにしよう。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第４章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

第１章で感じてもらった因数分解や式の展開の規則性を、少し詳しく眺めてみるね。

式の展開や因数分解には規則性があり、その規則性を眺めていけば一望千里できる！

[規則性 1m]　a^n-b^n の規則性

公式 12m：$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

公式 13m：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$　は、

$a-b$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$→因数分解はしきっていない段階
$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$
$a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$→因数分解はしきっていない段階
・
・
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$

という規則性のひとつに過ぎないということ。

よーく眺めてみると、
・$a-b$ をどれも因数に持っている！
・後ろの項は、例えば４乗 a^4-b^4 の場合なら、
　a と b で作り得る３次の項を全て列挙して全部足したものだ！
　　a が３つで作る a^3、a が２つと b が１つで作る a^2b、
　　a が１つと b が２つで作る ab^2、b が３つで作る b^3。
　　a と b でこれ以上の３次項は作れない！これで全てだ！

この２つの事実から類推すると、
$a^7-b^7=(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$　と予測できるのだね。
a^2-b^2 や a^3-b^3 だって一般的な a^n-b^n の中の一つに過ぎないことも分かるね。

このように並べて眺めるだけで、全てが一つの流れの中で見えてくる。
脳味噌に入りやすいインパクトがあるだろう！

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第４章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

[規則性から眺めた風景を日本語で語ると]

a^n-b^n の姉妹たちは、長女 $a-b$ を必ず因数に持つ！

a^n-b^n の姉妹たちは、$a-b$ でまとめた残りの項がキレイな規則性を持つ！

[因数定理から眺めてみる]

＊左辺の式に $b=a$ を代入すると、どの式の値も 0 になるから、
因数定理からも $(a-b)$ を因数に持つことが明らかだね。

＊偶数次の場合は、左辺の式に $b=-a$ を代入しても式の値は 0 になるから、
因数定理から、$(a+b)$ をも因数に持つことが分かるね。
「因数分解はしきっていない段階」というのは、そういうことだ。

a^n-b^n のうち n が偶数の姉妹たちは、長男 $a+b$ をも因数に持つ！

＊注１
a^n-b^n なる式で n が 4 以上の偶数のときに、因数分解せよと言われたならば、
上の式からだと、$(a-b)$ の後の項をさらに分解してくれたまえ。

ただ、上で並べた式は、規則性をはっきりさせるために並べたのであって、
わざわざ、この式を思い出してここから因数分解することもない。

直接に、下記のように因数分解すればいいんだよ。
道はいくらでもある！

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

$$a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^3)$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

でも、このように分解しきっちゃうと上の規則性には気が付かないね！
でも、その代わりに見えて来たこともある！
a^n-b^n のうち n が偶数のときは $a+b$ も因数になっていることがね・・・。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第４章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

[規則性 1p]　a^n+b^n の規則性

公式 13p：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　は、

$a+b$

$a^2+b^2=(a+b)(a-b)+2b^2$ →有理数係数の範囲で因数分解不可

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^4+b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)+2b^4$ →有理数係数の範囲で因数分解不可

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$a^6+b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)+2b^6$ →有理数係数の範囲で因数分解不可

・
・

n が奇数のとき

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})$

n が偶数のとき

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-a^2b^{n-3}+ab^{n-2}-b^{n-1})+2b^n$

という規則性のひとつに過ぎないということ。

よーく眺めてみると、

・偶数乗＋偶数乗の場合は因数分解できない！

・奇数乗の場合は、$a+b$ をどれも因数に持っている！

・後ろの項は、例えば５乗 a^5+b^5 の場合なら、

a と b で作り得る４次の項を全て列挙して符号をジグザグにしたものだ！

a が４つで作る a^4、a が３つと b が１つで作る a^3b、a が２つと b が２つで作る a^2b^2、
a が１つと b が３つで作る ab^3、b が４つで作る b^4。
a と b でこれ以上の４次項は作れない！これで全てだ！

この３つの事実から類推すると、

$a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$　と予測できるのだね。

a^3+b^3 だって一般的な a^n+b^n の中の一つに過ぎないことも分かるね。

このように並べて眺めるだけで、全てが一つの流れの中で見えてくる。

脳味噌に入りやすいインパクトがあるだろう！

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 4 章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

[規則性から眺めた風景を日本語で語ると]

a^n+b^n のうち n が奇数の兄弟たちは、長男 $a+b$ を必ず因数に持つ！

a^n+b^n のうち n が偶数の兄弟たちは、有理数係数の範囲で因数分解できない！

[因数定理から眺めてみる]

＊奇数次の場合、左辺の式に $b=-a$ を代入すると式の値は 0 になるから、
因数定理からも $(a+b)$ を因数に持つことが明らかだね。

＊奇数次の場合、左辺の式で $b=-b$ と置き換えれば、[規則性 1m]と全く同じ式になるよ。

例えば、公式 13p：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　は、$b=-b$ と置き換えるだけで、
公式 13m：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$　になってしまうということね。
逆も、同じことが言える。

＊偶数次の場合は、右辺で余っている $2b^n$ を左辺に移項すれば、

$$a^2+b^2=(a+b)(a-b)+2b^2$$
$$a^4+b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)+2b^4$$
$$a^6+b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)+2b^6$$

[規則性 1m]の因数 $(a-b)$ が $(a+b)$ と入れ替わったバージョンになっている
ことが分かるだろう。

＊注 2
同じ規則性で表現していくと、偶数次のときだけ+2 のオフセットが発生する！

では、実際に、a^n+b^n なる式で n が偶数のときに、実数係数の範囲で因数分解せよ
と言われたならばどうなんだろうか？

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第４章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

「こうだったらいいのにな！」で考えていくと、

$$a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab$$
$$=(a+b)^2-\left(\sqrt{2ab}\right)^2=\left(a+\sqrt{2ab}+b\right)\left(a-\sqrt{2ab}+b\right)$$

$$a^4+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2$$
$$=\left(a^2+b^2\right)^2-\left(ab\sqrt{2}\right)^2=\left(a^2+ab\sqrt{2}+b^2\right)\left(a^2-ab\sqrt{2}+b^2\right)$$

$$a^6+b^6=a^6+2a^3b^3+b^6-2a^3b^3$$
$$=\left(a^3+b^3\right)^2-\left(ab\sqrt{2ab}\right)^2=\left(a^3+ab\sqrt{2ab}+b^3\right)\left(a^3-ab\sqrt{2ab}+b^3\right)$$

と分解できる。

と言いたいところだけれども、

２乗＋２乗と６乗＋６乗の場合は、a,b 自体が $\sqrt{\ }$ の中に入ってしまっている。

これは、通常、因数分解したとは言わない。

但し、４乗＋４乗の場合は $\sqrt{\ }$ の中には入っていないので、

実数係数の範囲で因数分解できたと言えるんだね。

ついでに言っておくと、因数分解を複素数係数の範囲にまで拡張してやると、
$a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$
$a^4+b^4=\left(a^2+ib^2\right)\left(a^2-ib^2\right)$ と因数分解できてしまう。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 4 章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

[規則性 1mx]　x^n-1の規則性・・・[規則性 1m]の頻出タイプ

公式 12m：$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

公式 13m：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$　の形で、よく使われるものとして、

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$は、

$x-1$
$x^2-1=(x-1)(x+1)$
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$
$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$→因数分解はしきっていない段階
$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$→因数分解はしきっていない段階
・
・
・
$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$

という規則性のひとつに過ぎないということ。

[規則性から眺めた風景を日本語で語ると]

x^n-1の姉妹たちは、長女$x-1$を必ず因数に持つ！

x^n-1の姉妹たちは、$x-1$でまとめた残りの項がキレイな規則性を持つ！

これを理解しておくだけで、
4 次以上の因数分解が問われた時も、労力が少なくして導出できる。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第４章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

[因数定理から眺めてみる]

＊左辺の式に $x=1$ を代入すると式の値は 0 になるから、
因数定理からも $(x-1)$ を因数に持つことが明らかだね。

＊偶数次の場合は、左辺の式に $x=-1$ を代入しても式の値は 0 になるから、
因数定理から、$(x+1)$ をも因数に持つことが分かるね。
「因数分解はしきっていない段階」というのは、そういうことだ。

x^n-1 のうち n が偶数の姉妹たちは、長男 $x+1$ をも因数に持つ！

ただ単に、x^6-1 を因数分解せよと言われたら、

$x^6-1=(x^3)^2-(1)^2=(x^3+1)(x^3-1)$　から導いてもいいんだよ！

上に示した式たちは、規則性をはっきり捉えるために分解した式だからね。
その方が早いかもしれないし・・・。
でも、上の規則性の式から因数分解をしきっても構わない。

一方、x^5-1 を因数分解せよと言われたら、上の規則性の式しかない。

でも、「覚えておけ」ということではないよ。
伝家の宝刀「因数定理」を利用すれば、上の規則性の式は求まるね。
因数定理からも $(x-1)$ を因数に持つことが明らかだから、
$(x-1)$ でシコシコ割り算していけば、自然にこの式が出てくるね。

ところで、「フィボナる・リュカる」でも途中で説明したけれども、

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$$
$$\downarrow$$
$$r^n-1=(r-1)(r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+r^2+r+1)$$
$$\downarrow$$
$$1-r^n=(1-r)(r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+r^2+r+1)$$
$$\downarrow$$
$$1+r+r^2+\cdots+r^{n-2}+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$

初項 1、公比 r の等比数列の第 n 項までの和の公式が、こんなところに・・・。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第４章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

[規則性 1px]　x^n+1の規則性・・・[規則性 1p]の頻出タイプ

公式 13p：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$の形で、よく使われるものとして、

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$　は

$x+1$
$x^2+1=(x+1)(x-1)+2$→有理数係数の範囲で因数分解不可
$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^4+1=(x+1)(x^3-x^2+x-1)+2$→有理数係数の範囲で因数分解不可
$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$
$x^6+1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)+2$→有理数係数の範囲で因数分解不可
・
・
・

n が奇数のとき
$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+x^2-x+1)$
n が偶数のとき
$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots-x^2+x-1)+2$
という規則性のひとつに過ぎないということ。

[規則性から眺めた風景を日本語で語ると]

a^n+b^nのうち n が奇数の兄弟たちは、長男$a+b$を必ず因数に持つ！

a^n+b^nのうち n が偶数の兄弟たちは、有理数係数の範囲で因数分解できない！

これを理解しておくだけで、
５次や７次の奇数次の因数分解が問われた時、計算せずとも導出できる。

＊奇数次の場合、左辺の式に$x=-1$を代入すると式の値は0になるから、
因数定理からも$(x+1)$を因数に持つことが明らかだね。

＊偶数次の場合は、右辺で余っている２を左辺に移項すれば、
[規則性 1mx]の因数$(x-1)$が$(x+1)$と入れ替わったバージョンになっている。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 4 章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

[規則性 2p]　$(a+b)^n$ の規則性と a^n+b^n との間柄

$(a+b)^n$ の式の展開及びその逆である因数分解の公式は、

公式 22p：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

公式 23p：$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

公式 24p：$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=(a+b)^4$

・
・
・

公式 25p：$\sum_{r=0}^{n} {}_nc_r a^{n-r}b^r=(a+b)^n$ ・・・二項定理（後述）

という規則性に支配されていること。

そして、a^n+b^n と $(a+b)^n$ との間柄として、

準公式：$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$　は、公式 22p の変形に過ぎず、

準公式：$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$　は、公式 23p の変形に過ぎない。

言葉として意識してほしいこと。

a^n+b^n は、いつだって $(a+b)^n$ を使って表せる！

＊$(a+b)^n$ は $b=-b$ と置き換えれば、$(a-b)^n$ と全く同じ式になるよ。

すなわち、公式 22p、23p、24p は
$b=-b$ と置き換えるだけで、すぐに、公式 22m、23m、24m になってしまう。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 4 章：雀百まで規則性を忘れず　～規則性で理解する式の展開と因数分解～

[規則性 2m]　$(a-b)^n$ の規則性と $a^n \pm b^n$ との間柄

$(a-b)^n$ の式の展開及びその逆である因数分解の公式は、

公式 22m：$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

公式 23m：$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

公式 24m：$a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4=(a-b)^4$

・
・
・

公式 25p：$\sum_{r=0}^{n} {}_nc_r a^{n-r}(-b)^r=(a-b)^n$ ・・・二項定理（後述）

という規則性に支配されていること。

準公式：$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$　は、公式 22m の変形に過ぎず、

準公式：$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$　は、公式 23m の変形に過ぎない。

二項定理は、「場合の数」の知識で説明されます。
第 5 章で説明しますが、実際の係数を求めること自体は、意外に簡単な方法があります。
実は「**パスカルの三角形**」と言う簡単な数字のツリー三角形を作れば出るのだね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
https://e-littlefield.com/teito-vision
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。