

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

一般的にもそうなのですが、お受けする質問からもやはり、二次式、二次方程式、二次関数がバラバラの知識でしか理解できていない子が多いように見受けられます。

この基本だけでも入試の半分を占めると言っても過言でないほど高校数学の幹となっている最上流の概念ですから、夏休みの際に完膚なきまで体系化しておきましょう。

その他の単元をやる時も常につきまってくる最上流概念ですから、ここをあやふやにしておくとも本当に数学が伸びることなどはあり得ないこととなってしまいます。

逆に、ここを体系化して突破してしまうと、数学とはこんなに簡単なことしか言っていなかったのだと気付くことでしょう。

実は、資料は徹底的にこの体系化を意図して書かれていますので、重複する部分が多々出ますが、質問への回答とした資料を使いながら、超初心者レベルでステップ・バイ・ステップにまとめていきます。

とは言っても、数学を暗記や操作で乗り切っている、そこそこ成績優秀者の中にも、知識がバラバラな諸君も多々おられます。

バカにせずに一読の上、体系的に理解すれば、もっと楽に成績を伸ばせますよ。

この夏期特別レポートで、公式を丸暗記していた自分を、「なんとムダな時間を浪費していたのだろうか！」と恥ずかしく思うかもしれません。

それでは、理解するためのケーススタディ素材として、【 x に関する二次式 $x^2 + x - 2$ 】を対象としてスタートしていきます。

【言葉の使い方】

※下記は、それぞれの言葉の定義ではありません。

あくまでも、 $x^2 + x - 2$ を対象として言葉の違いと関係性を理解してもらうための例です。

- ① x に関する二次式とは、 $\Rightarrow x^2 + x - 2$ そのもののこと。
- ② x に関する二次方程式とは、 $\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ のこと
「 x に関する二次式が0になる特殊な場合を考えるよ」ということ
- ③ x に関する二次関数とは、 $y = x^2 + x - 2$ のこと
「変数 x によって値が変わる式の値を y と置いてやるよ」ということ

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

二次式、二次方程式、二次関数の言葉の違いを、上の感覚でまず理解しておいてください。

ここで、いちいち「 x に関する・・・」と書いているのは、単なる「二次式」とだけ書かれた場合は、例えば、 $x^2 + xy - 2$ などのように多変数の二次式も含まれるからです。

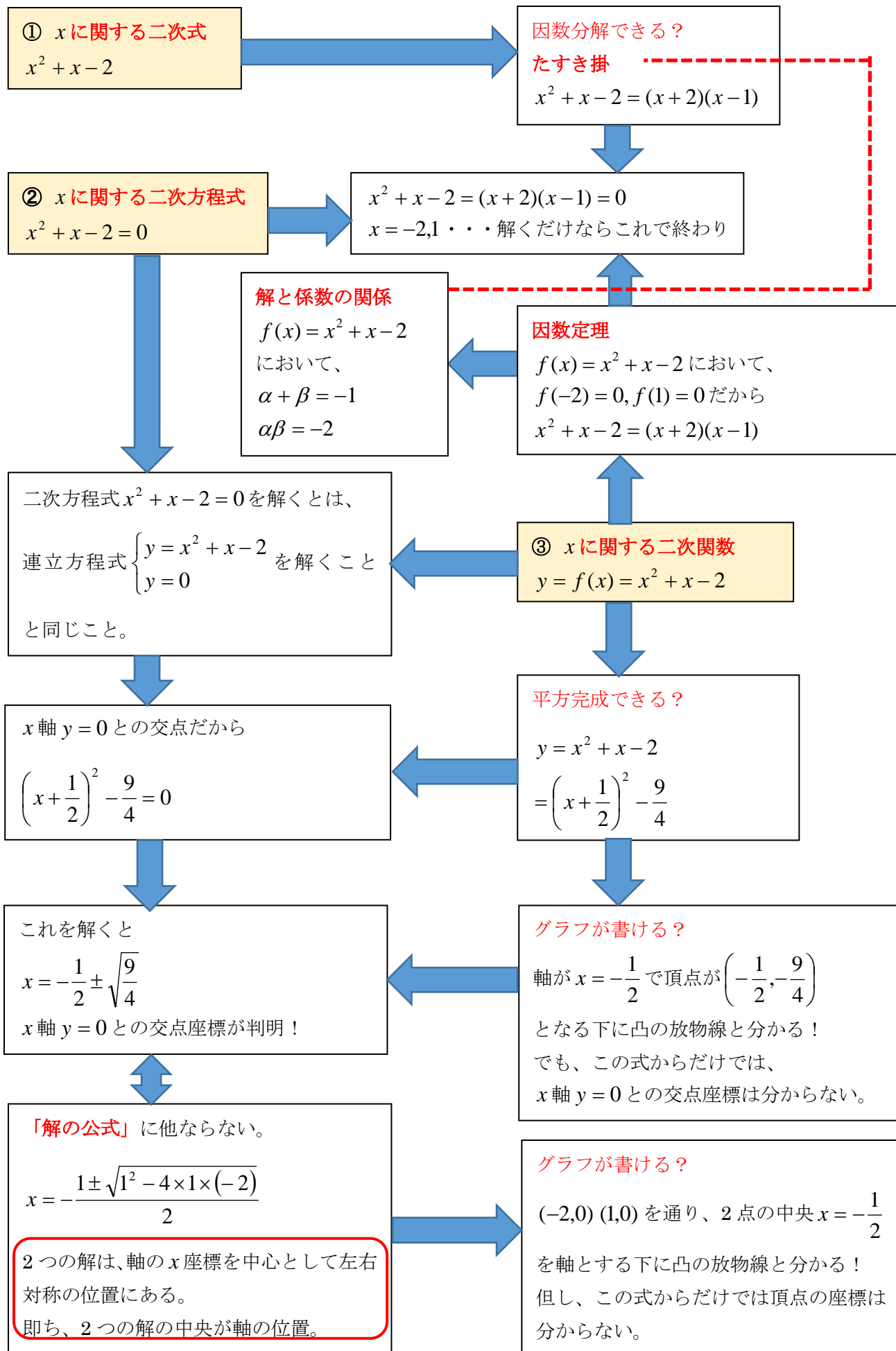
それで、1変数 x だけで式が構成されている数式に限定したい場合には、厳密には「 x に関する」という修飾語をつけなければならないということなんです。

一般的に「二次関数」と言えば、「 x に関する二次関数」が指されるわけなんですけど、例えば、 $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x + 4y + 5$ も「二次関数」であるということは頭に入れておいてください。この場合は、厳密に言うと「 x 、 y に関する二次関数」となり、数Ⅱや数Ⅲではよく出てきます。

即ち、単に「二次関数」と言う場合、本来は放物線だけを表すのではないのですが、文脈上、あるいは通念的に、「 x に関する二次関数」＝「グラフが放物線になる関数」が指されることが多いという程度の認識はしておいて欲しいのです。

それでは、本特別講座の内容を体系化マップで次に示しておきます。

それぞれの項目はしっかりと理解している、暗記している諸君は、このマップを眺め確認するだけで、第2の壁を破ることができることでしょう。



二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

 x に関する二次式の因数分解は、サクサクとこなせる訓練はしておこう！① x に関する二次式 $x^2 + x - 2$ が、因数分解処理が出来るかどうかを見ておくと、

■脳細胞が処理する流れをまず見ておきましょう。

掛けて -2 、足して 1 になる数があるか？

↓

あれば、たすき掛けで処理すれば、その答えが出てくるとのこと。

↓

容易に 2 と -1 であることが出ます。

$$y = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

手慣れた諸君は、たすき掛けを書くことなしに、上の 1 行の式だけを頭で完成します。

もう少し詳しく言いますと、彼は最初に次のように書きます。

$$y = x^2 + x - 2 = (x + \quad)(x - \quad)$$

即ち、何だか分からないけれど、この二次式が因数分解できるとすれば

 $(x + \quad)(x - \quad)$ という形になることは間違いありませんから、このように書いた後、左辺と辻褃を合わせるためには、空白の部分にどんな数字を入れればよいのか？と頭の中でたすき掛けするわけです。

ですから、ここの思考回路をじっくりと解説入りで見れば、たすき掛けの正体もくっきり見えてきますし、少し訓練をすれば、頭の中だけでたすき掛けすることもできるかもしれません。

たすき掛けで因数分解が出来てしまえば、

② x に関する二次方程式 $x^2 + x - 2 = 0$ はそのまま解決しちゃいます！

$$y = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \Rightarrow \text{よって、} x = -2.1 \text{ とね！}$$

ただ、この例の因数分解は、たすき掛けも至って簡単で初歩中の初歩と言えますので、説明ではもう少し一般的な形で進めていきますよ。

 x^2 の係数は、いつも 1 とは限りません。そして、 1 ではない場合を理解して初めて、「たすき掛け」の正体が具体的に分かってきます。

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

■たすき掛けの正体

そこで、 x に関する二次式 $2x^2 + 5x - 3$ で考えていくことにします。

x に関する二次式 $2x^2 + 5x - 3$

↓

因数分解が出来る＝掛けて -3 、足して 5 になる数がある

↓

いいえ、違います。

x^2 の係数が 1 の時のようなわけにはいきません。

↓

その理由は、

先ほどの例で、手慣れた彼が書いた式 $y = x^2 + x - 2 = (x + \quad)(x - \quad)$ にあります。

↓

もし、因数分解が出来たならば、どういう形になるかを考えてみてください。

$y = 2x^2 + 5x - 3 = (2x + \quad)(x - \quad)$ or $(x + \quad)(2x - \quad)$ という形になる筈です

片方が+で片方が-であるのは、定数項がマイナスだからですね。

↓

空白に入るべき 2 つの整数を掛ければ -3 であることは確かです。

$$y = 2x^2 + 5x - 3 = (2x + \quad)(x - \quad) \quad \text{or} \quad (x + \quad)(2x - \quad)$$

定数項はここだけ

しかし、空白に入るべき 2 つの整数を足して 5 になることで辻褃が合うわけではありません。

$$y = 2x^2 + 5x - 3 = (2x + \quad)(x - \quad) \quad \text{or} \quad (x + \quad)(2x - \quad)$$

x の項はこの 2 か所

何故なら、 x の係数は上の  を足したものでなければならないからです。

どちらか一方は、入るべき数の 2 倍を足さねばならないからです。

日本語で言えば、「入るべき数の何れか一方を 2 倍した数ともう一方を足して 5 になる。」と言わねばなりません。

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する (超初級)

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

掛けて -3、いずれか一方は 2 倍した結果を足して 5 になる数を求めればよいという話しになります。

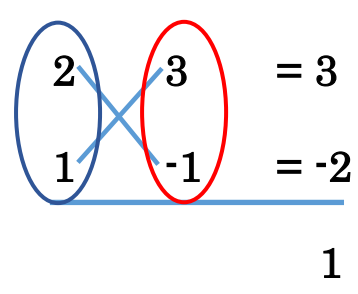
そうすると、本間のように頭の中で計算して、チャチャッと出すわけにはいかないですね。それでいい方法はないか？と誰かが思いついたのがたすき掛けというわけです。

よく見てみると、

$$y = 2x^2 + 5x - 3 = (2x + \quad)(x - \quad) \quad or \quad (x + \quad)(2x - \quad)$$

たすき掛けとは、2か所の の掛け算の和を目で見ても、分かりやすくしたものに他なりません。

掛けて 2 になるような組み合わせ・・・(x²の係数の配分)



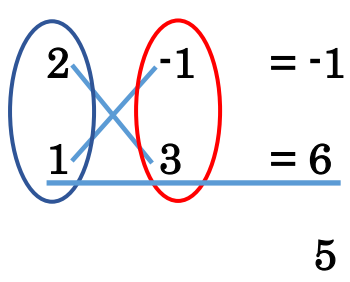
掛けて -3 になるような組み合わせ・・・(定数項の配分)

組み合わせだから、上下入れ替えたり、符号を入れ替えたりして、どのような組み合わせの時に、xの項の係数がピッタリ一致するかを探せばいいんだね。

上のたすき掛けでは、

$$y = (2x + 3)(x - 1) = 2x^2 + x - 3 \text{ となって一致しないからダメということになる。}$$

正解は、



即ち、

$$y = (2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 5x - 3$$

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

x^2 の係数が1の場合は、 \bigcirc は1と1ですから、 \bigcirc の数字を足して x の係数と一致すればよいと表現できたのですが、 x^2 の係数が1以外の場合は、その表現ではダメなことが分かりますね。

さて、この組み合わせを効率的に見つけるお話をしましょう。

$$y = 2x^2 + 5x - 3$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad \bigcirc = ? \\ 1 \quad \triangle = ? \end{array}$$

5

掛けて-3

符号がマイナスであることだけ頭に入れて、3でたすき掛けを考える

掛けて3になるのは(1,3)の組み合わせしかない。

↓

実際には、どちらかがマイナスであるから、たすき掛けの差を取って5になるような数を探せ！

↓

2と掛ける方を3にしてやれば、6となり、もう一方は1。

差が5になるのでOK。

↓

実際には上側が-1で下側が3の組み合わせとなる。

訓練を少し積んで、慣れてくると、

$$y = 2x^2 + 5x - 3 = (2x + \quad)(x - \quad) \quad \text{or} \quad (x + \quad)(2x - \quad)$$

とどちらかを書きながら、上記の思考回路を巡りながら直接的に数字をいれていけるようになる。

例えば、最初の式を書いたとすれば、 $(2x+1)(x-3)$ となっちゃって、 x の項がマイナス優勢になるから、符号が逆だったと、消しゴムで消して入れ替えればいいだけの話ですよ。

単に、たすき掛けする操作方法だけではなくて、このように仮の因数分解式と対照しながら訓練することと、候補を早く見つけるコツをじっくり考えてみてください。

質問があれば、どんどんしてください！

さて、因数分解できない時でも、『解の公式』を使えば二次方程式が解けることはご存知ですね。

『解の公式』の正体は、次回の平方完成で明らかにしていきます。

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

xに関する二次式は、すぐに平方完成できるようにしておこう！③ 一方、xに関する二次関数 $y = f(x) = x^2 + x - 2$ のグラフはこの形だけでは書きにくい！

では、描きやすくするための前処理はできるだろうか？

できる！それが、完全平方の形に持ち込むこと！（平方完成）

$$y = x^2 + x - 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

瞬間に出来るレベル

↓

詳しく書いておくと、

$$y = x^2 + x - 2$$
$$= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

↓

↓

↓

↓

この式を見れば、

「軸が $x = -\frac{1}{2}$ で頂点が $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ の下に凸の放物線を表す」と

↓

引き続き、グラフを軽くフリーハンドで描くことが出来ねばならない。

基本：完全平方の形に変形する。

$$(x+a)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2$$

左辺を完全平方の形と呼ぶ！

右の形は左の形にすぐに変形できること。（因数分解）

普通は、 $x^2 + 2ax + C$ の形で出てくるけれど、

$$x^2 + 2ax + a^2 - a^2 + C$$

$$(x+a)^2 - a^2 + C$$
 と完全平方の形に変形できる。

この変形に慣れること！

資料でも口を酸っぱくして言っていることですが、
こうだったらいいのにな（○）に持ち込んで、差分の辻褄（○）を合せる。

即座に言えねばならない！

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

グラフを軽くフリーハンドで描くことが出来ねばならない。

$$y = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \text{ という}$$

完全平方の式の形が分かりやすいのは何故？

↓

$$x = -\frac{1}{2} \text{ のとき } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \text{最小値 } 0 \text{ は明白！}$$

(2乗だから最小値以外は必ず正だもん！)

↓

これが、放物線の谷だ！

$$x = -\frac{1}{2} \text{ を軸として左右対称になる！}$$

↓

$$\text{軸が } x = -\frac{1}{2} \text{ で頂点が } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

となる下に凸の放物線と分かる！

↓

よって、右の図がすぐに描けねばならない！

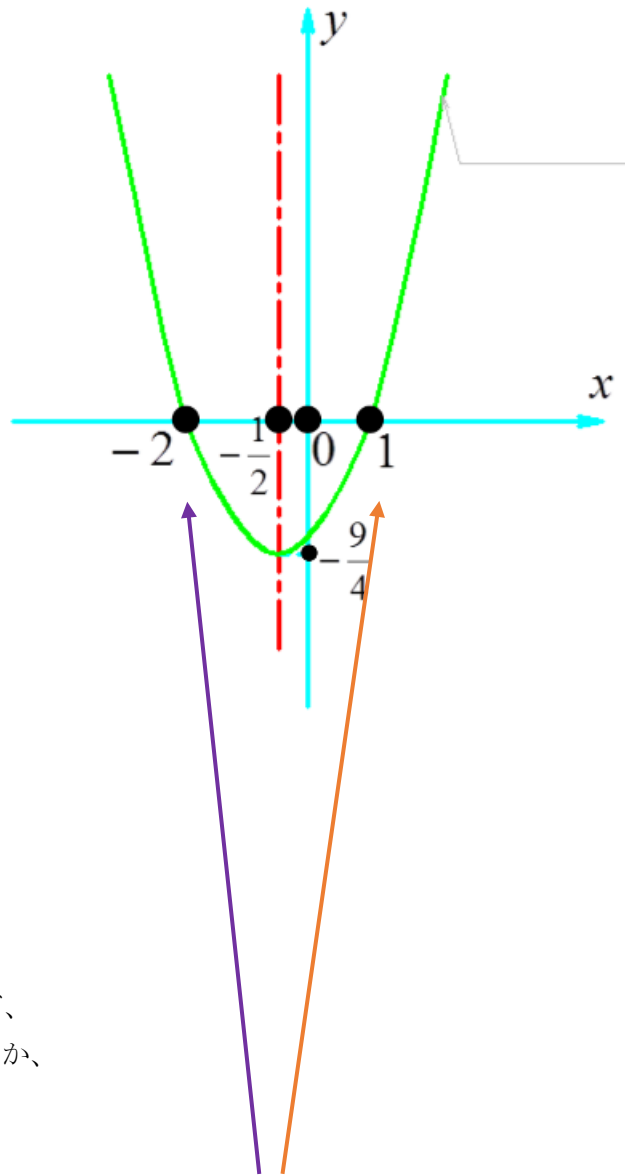
但し、軸と頂点は式から一目で分かるけれど、
x軸との交点座標が実際にはいくらになるのか、
この式からは一目では分からない。

そう、この完全平方の式からでは、 $y = 0$ としての計算という手続きを経なければ正確な交点は出せない。

そこで、よく考えてみよう！

このグラフで、x軸との交点座標を求めるということは、

$$\text{連立方程式 } \begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ を解くことと同じこと。}$$

これは、二次方程式 $x^2 + x - 2 = 0$ を解くことと同じことに他ならない。

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

別の言い方をすれば、

方程式 $x^2 + x - 2 = 0$ を解くとは、放物線 $y = x^2 + x - 2$ と $y = 0$ (x 軸) の交点の x 座標を出すことと同じこと。

ということになるね！

即ち、

② x に関する二次方程式 $x^2 + x - 2 = 0$ を解けば出てくるということだ。

これが因数分解できるかどうか？

本題のように、 $y = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ と因数分解出来ちゃえば、そのまま、正確な交点 x 座標が $x = -2, 1$ だと出てくることになる。二次方程式 $x^2 + x - 2 = 0$ は、 $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ と因数分解することで、式だけで $x = -2, 1$ とすぐに解答は出たが、

さて、因数分解できなければどうする？

せっかく平方完成した式なんだから、これを利用しない手はない！！

 $y = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ と $y = 0$ (x 軸) の交点を求めても出る！

完全平方の式から解くことが「解の公式」そのものの意味

 $y = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ と $y = 0$ (x 軸) の交点とは、 $y = 0$ になるためには、 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ が $\frac{9}{4}$ になればいい！即ち、 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

解の公式の正体

たすき掛けできない時も解の公式で二次方程式は解けるということ！

実際の解の公式と対照させて、意味をじっくり理解してみて。

その作業が一番大切なこと！

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

解の公式

x に関する二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解は、

与式を完全平方の変形し、 $x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0$ に変形することで、

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4b}{4}} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ と出てきます。}$$

全く、忘れても何の心配のない公式ですし、頻繁に使う機会があるので、覚えるつもりがなくても覚えるでしょう。

公式を覚えようとするのではなく、平方完成して=0になる場合を解けばいいということなんだね。

資料の【因数の頭に解宿る】では、「解と係数の関係」に有名な式変形を利用して、「解の公式」を導き出していますので、こちらも読んでおいてください。

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

二次式で絶対値を学び直す！助け合うグラフ脳と式脳を作れ！

さて、ついでに二次関数を通して「絶対値」という概念を復習しておきましょうか！

本講座の素材にしている二次関数では、 $y = |x^2 + x - 2|$ ということになります。

絶対値に関しては、【帝都大学へのビジョン】の本編に、例えばとしての説明として挿入していたのですが、何と翌年の慶應大学経済の入試にそのままみたいな問題が出題されたと報告を受けてびっくりしたエピソードがあります。

こちらは、絶対値の概念を日本語で理解していれば、必要以上に難しく考える必要はないという意図で書き記したものですので、機会があれば読み直してください。

絶対値とは、**0からのへだたりのこと**であるからマイナスはありません。

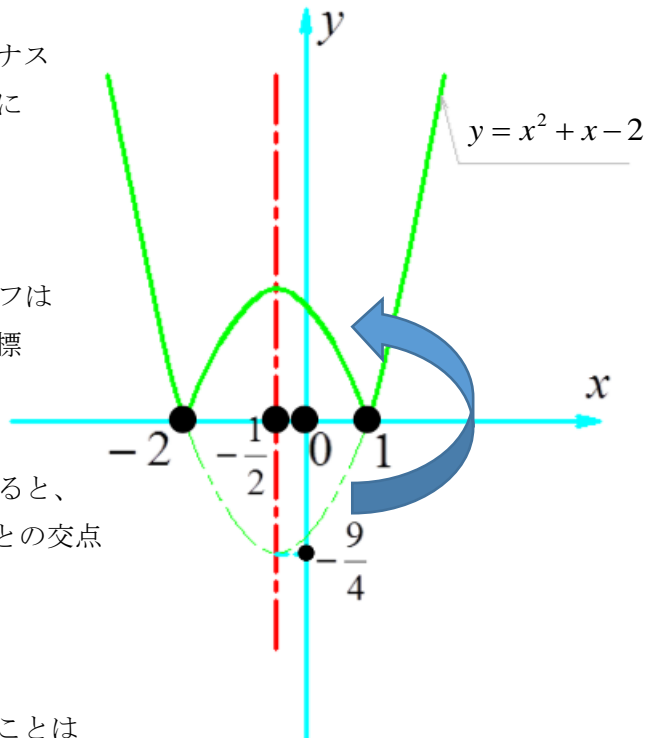
-4の絶対値は4ということです。

もし、ある x の値を入れたときに、 $x^2 + x - 2$ の値がマイナスであれば、符号を逆にプラスにしなければならないということですね。

グラフで言えば、 x 軸より下側にあるマイナスの部分は、 x 軸を軸として対称にプラス側にひっくり返した図になるということです。右のような図になるということですね。

式を平方完成させた形に変形すると、グラフは書きやすくなりますが、 x 軸との交点の座標は、結局別に計算しなければなりません。

もし、元の式だけで考えて、因数分解できると、 $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ となって、 x 軸との交点は、そのまま出てしまいます。



x に関する二次式ですから、放物線であることは自明の理であり、しかも交点分かれば、その真ん中が軸の位置と認識していれば、完全平方の形にしなくとも、そのままグラフは描けますね。

二次式・二次方程式・二次関数を体系的に理解する（超初級）

躓きの最上流を克服すれば一挙に飛躍

さて、元の式からだけで絶対値を考える経験もしておかねばなりません。

$x < -2$ であれば、 $(x+2)$ は必ずマイナス、 $(x-1)$ も必ずマイナス

よって、 $(x+2)(x-1)$ はマイナス同士の掛け算になりますから必ずプラス

⇒ $y = |x^2 + x - 2|$ は $y = x^2 + x - 2$ とそのまま絶対値を外せばいいですね。

$-2 < x < 1$ であれば、 $(x+2)$ は必ずプラス、 $(x-1)$ は必ずマイナス

よって、 $(x+2)(x-1)$ はプラスとマイナスの掛け算になりますから必ずマイナス

⇒ $y = |x^2 + x - 2|$ は $y = -(x^2 + x - 2)$ と符号を逆にすれば絶対値を外せます。

$1 < x$ であれば、 $(x+2)$ は必ずプラス、 $(x-1)$ も必ずプラス

よって、 $(x+2)(x-1)$ はプラス同士の掛け算になりますから必ずプラス

⇒ $y = |x^2 + x - 2|$ は $y = x^2 + x - 2$ とそのまま絶対値を外せばいいのです。

それだけのこと！

x に関する二次式の絶対値は、二次方程式の解が2つ存在する場合には、解を境目にしてプラス領域になる範囲はそのまま、マイナス領域になる範囲は符号を逆にして初めて絶対値を外せるということに過ぎません。

グラフと対照することで、その関連性をしっかりと自分の意味世界で組み立ててください。

$y = |x-1| + |x-2|$ のような一次式の場合も考え方は同じです。

$x < 1$ であれば、 $(x-1)$ は必ずマイナス、 $(x-2)$ も必ずマイナス

よって、 $y = |x-1| + |x-2| = -(x-1) - (x-2)$ とどちらも符号を逆にして絶対値を外せる

$1 < x < 2$ であれば、 $(x-1)$ は必ずプラス、 $(x-2)$ は必ずマイナス

よって、 $y = |x-1| + |x-2| = (x-1) - (x-2)$ と後項だけ符号を逆にして絶対値を外せる

$2 < x$ であれば、 $(x-1)$ は必ずプラス、 $(x-2)$ も必ずプラス

よって、 $y = |x-1| + |x-2| = (x-1) + (x-2)$ とどちらもそのまま絶対値を外せる

さて、二次方程式の解は、必ず存在するとは限りません。

これは、二次関数のグラフは必ず x 軸と交点があるとは限らないことと対応しています。

次回は、判別式と絶対値と同じような思考回路で処理できる二次不等式を見ていきましょう。