質問用紙 [redacted] 高校[illegible]1

会員番号：	名前：[redacted]

H 7 年 12 月 6 日　No.　　　（当方欄）

回答ランク
希望ランクに○のこと
ランク1：ヒント程度
ランク2：コメント
ランク3：詳細コメント

通話希望の方のみ○のこと
通話希望
通話希望時間
本日の場合：
明日の場合：

質問内容又は項目

数II 直線 $x-y-1=0$ を l とし、

(1) 放物線 $y=x^2$ 上の点を P とする。
P と l の距離が最小となるとき P の座標および P と l の距離を求めよ。

(2) 平行な2直線 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=2$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=5$ 上の点をそれぞれ P, Q とするとき、P, Q の最短距離を求めよ。また2つの直線から等距離にある直線の方程式を求めよ。

数B △OAB において辺 OA の中点を M, 辺 OB を 2：1 の比に内分する点を N とする。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とするとき次の直線のベクトル方程式は？
A を通り MN に平行な直線

(2) O を原点として $\overrightarrow{OA}=(3,1)$ $\overrightarrow{OB}=(1,2)$ とする 実数 s, t が次の条件を満たしながら変化するとき、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で与えられる終点 P の存在範囲を図示せよ。
$0 \leqq s \leqq 1$, $1 \leqq t \leqq 3$

はじめまして。期末テスト直前ですごくあせっています。なるべく明日中には FAX ほしいです。FAX 番号 [redacted] です。
よろしくお願いします。

ここまでわかったのですが。

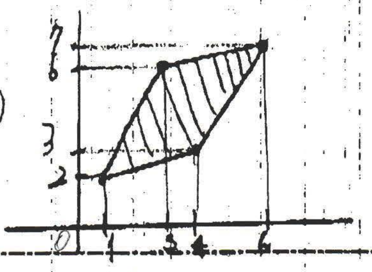
解答
数II (1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ ［P(t, t^2) とおくと P と l の距離は $\frac{|t^2-t+1|}{\sqrt{2}}$］

(2) $\frac{36}{5}$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=\frac{7}{2}$

数B (1) $\vec{p}=\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}$

直線 AB と直線 MN はわかったのですが……。

(2)



回　答

とりあえず、解答例をFAXします。
もう少しコメントを加えてあげたいので、今日中に再度入れます。

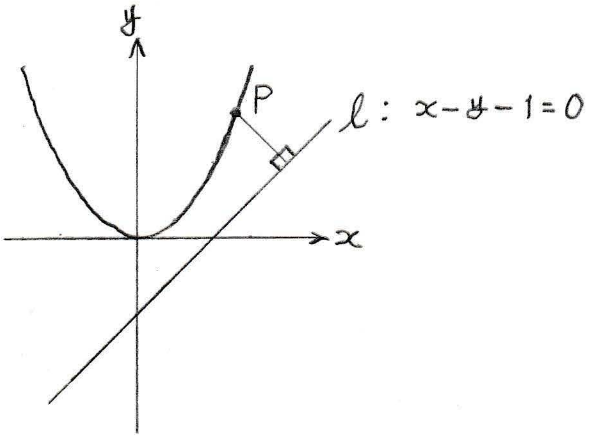
回答用紙（補足）

会員番号：	名前：[redacted] 様

H 7年 12月 7日　　No. 1/3

1） 直線ｘ－ｙ－１＝０を１とし、放物線ｙ＝ｘ² 上の点をＰとする。
Ｐと１の距離が最小となるときＰの座標およびＰと１の距離を求めよ。

（下から続く）



点Pは放物線$y=x^2$上の点であるから
その座標を(t,t^2)とおく

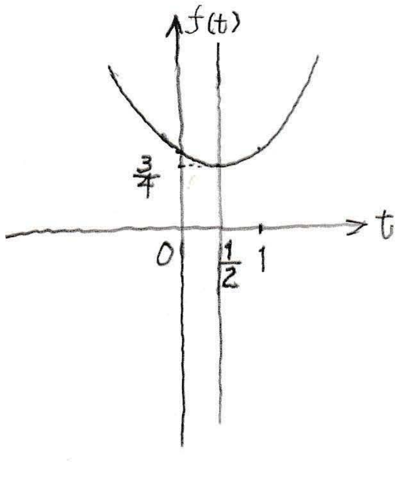
点$P(t,t^2)$と直線$x-y-1=0$との距離Sは

$$S=\frac{|t-t^2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|t-t^2-1|}{\sqrt{2}}\ \text{である.}$$

ここまで出来てりゃ
あと一息なのに！
絶対値など気にせず、
$t-t^2-1$が二次関数
だから そのグラフ放物線を
イメージしてもらえれば
よかったんだよ！

Sが最小になるのは
$f(t)=|t-t^2-1|$が最小になる時である。

$$f(t)=|t-t^2-1|=|-t^2+t-1|$$
$$=\left|-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-1\right|=\left|-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right|$$



$f(t)$をグラフに表わすと
左図のようになる。
従って、$f(t)$は$t=\frac{1}{2}$のとき
最小値$\frac{3}{4}$をとる。

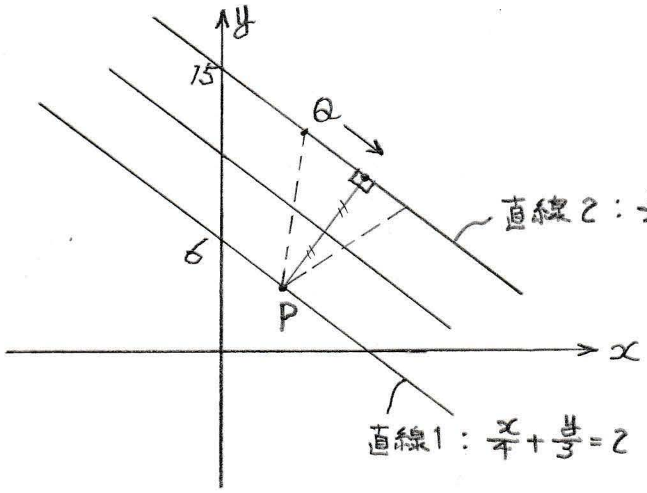
従って、Pとlの距離が最小と
なるのは、
$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$のときで、
その距離は$\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ //

回答用紙（補足）

会員番号：	名前：[redacted]様

H 7年12月7日　No. 3/3

２）平行な２直線 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=2$，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=5$ 上の点をそれぞれP，Qとするとき、P，Qの最短距離を求めよ。また、２つの直線から等距離にある直線の方程式を求めよ。



平行な2直線は、各々

直線1：$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=2 \Rightarrow 3x+4y-24=0$ ——(1)

直線2：$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=5 \Rightarrow 3x+4y-60=0$ ——(2)

直線1上の点 $P(a,b)$ とするとき、

点Pと直線2上の点Qとの距離が最短になるのは、点Pから直線2におろした垂線の足に点Qが一致するときである。

従って、点 $P(a,b)$ と直線 $3x+4y-60=0$ の距離Sが P,Q の最短距離となる。

$$S=\frac{|3a+4b-60|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|24-60|}{\sqrt{25}}=\frac{36}{5}$$

（∵ 点 $P(a,b)$ は直線1上の点であるから $3a+4b=24$）

2つの直線から等距離にある直線は、この2つの直線に平行であるから、その方程式は、α を任意の定数として

直線3：$3x+4y-\alpha=0$ ——(3) とおける。

この直線上の点 (c,d) と直線1及び直線2との距離は各々 $\dfrac{36}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{18}{5}$ である。

（下から続く）

一方、点 (c,d) と直線1の距離は

$$\frac{|3c+4d-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

ここで、点 (c,d) は直線3上の点であるから、

$$3c+4d=\alpha$$

従って、

$$\frac{|\alpha-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|\alpha-24|}{5}=\frac{18}{5} \quad \text{——(4)}$$

同様に、点 (c,d) と直線2の距離から、

$$\frac{|\alpha-60|}{5}=\frac{18}{5} \quad \text{——(5)}$$

(4)(5)を解いて

$$\alpha=42$$

従って、2つの直線から等距離にある直線の方程式は

$$3x+4y-42=0$$

即ち、

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{7}{2}$ である。

回答用紙（補足）

会員番号：	名前：[redacted]様

H 7 年 12月 7 日　　No. 3/3

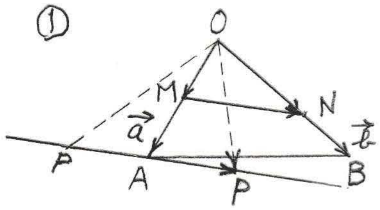
3）△OAB において辺ＯＡの中点をM、辺ＯＢを２：１の比に内分する点をＮとする。

①$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$、$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$とするとき次の直線のベクトル方程式を求めよ。
　Ａを通りＭＮに平行な直線

②Ｏを原点として$\overrightarrow{OA}=(3,\ 1)$　$\overrightarrow{OB}=(1,\ 2)$とする。実数ｓ，ｔが次の条件を満たしながら

変化するとき、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$で与えられる終点Ｐの存在範囲を図示せよ。　$0\leqq s\leqq 1$，$1\leqq t\leqq 3$

①



$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

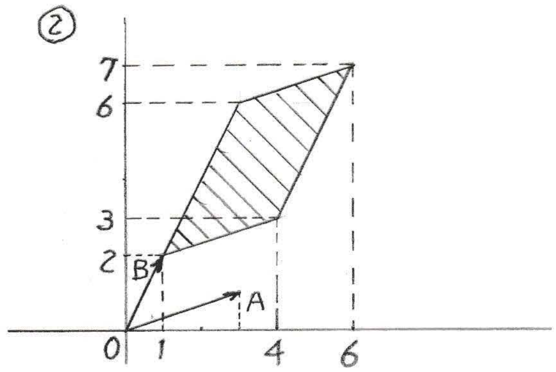
Aを通り$\overrightarrow{MN}$に平行な直線のベクトル方程式は

$\vec{P}=\vec{a}+t\overrightarrow{MN}=\vec{a}+-\frac{t}{2}\vec{a}+\frac{2t}{3}\vec{b}$

即ち、

$\vec{P}=(1-\frac{t}{2})\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}$　（但し、tは任意の実数）

②



①
Aを通り MNに平行な直線上の点をPとすると、$\overrightarrow{OP}$が$\vec{a}$と$\vec{b}$を使ってどう表わされるのか？という式がベクトル方程式だよ！
そうすると、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

これは、ベクトル$\overrightarrow{MN}$と平行で向きは反対もあり得るよね！そして、大きさは$\overrightarrow{MN}$の大きさの何倍でも何分の1でも構わないんだ。
だから、

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{MN}$（tは任意の実数）

ということになる！

② $s\overrightarrow{OA}$の終点は $0\leqq s\leqq 1$だから OとAの間（両端含めて）になる。
$t\overrightarrow{OB}$の終点は $1\leqq t\leqq 3$だから点Bから、OBの延長線上で$\overrightarrow{OB}$の3倍の長さのところまでだ！

従って、
1）Oを始点としてAまでの点（Aを含む）を終点とするベクトル
2）Oを始点として、点Bから OBの延長線上でOBの3倍の長さまでの点を終点とするベクトル
の各々のベクトルの和になりますヨ！

回答用紙（補足）

会員番号：	名前：[redacted]様

H 7年12月7日　No. 4

3）"ベクトル"というものに少し戸惑っているのかな？

そうだね。今までさんざんと勉強させられてきた『座標』『方程式』の世界とはちょっと様子が違う。点と矢印直線だけでなんだかわけの分らない代数を解けという。戸惑って当然だと思うよ。

ここで、先ず"ベクトル"の初歩としてこう考えて下さい。

例えば、$\overrightarrow{AB}$ とは『AからBへ線を走らせること』

$\overrightarrow{BC}$ とは『BからCへ線を走らせること』

だから、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ と来ると

『AからBへ走り、次にBからCに走る。その結果や如何に？
そう、AからCに走ったことと結果は同じじゃないか』

ということになります。

というようなわけで

3）① $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}$ ということになり

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

次にAを通ってMNに平行な直線を引く。これは、もうただAを通りさえすればいいんだから、無限に長い直線だね！
この直線上の任意の点Pを表現するのが、直線のベクトル方程式だ！

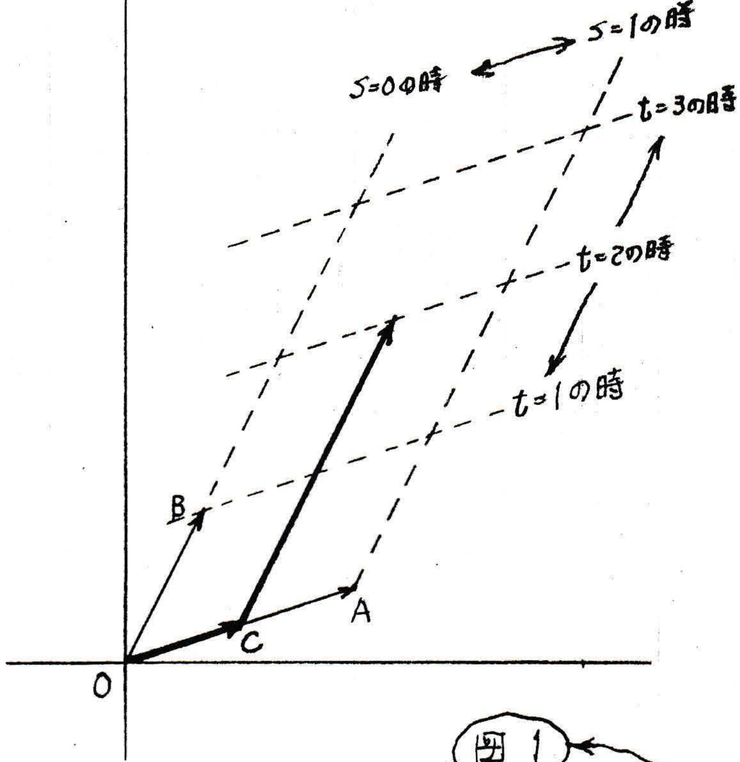
それじゃ、どこが基準なの？ これは、もう $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点となっている点即ち、点Oのことだよね？ $\overrightarrow{OP}$ のことがこの直線のベクトル方程式だ！
だから、

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}$

ここで、$\overrightarrow{AP}$ は $\overrightarrow{MN}$ と平行だから、$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{MN}$

tはプラスでもマイナスでもいい。
大きさも何だっていい。
即ち実数全部でいいんだ。

3) の問題に関してフォロー



$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \leqq s \leqq 1 \\ 1 \leqq t \leqq 3 \end{bmatrix}$$

例えば $s = \frac{1}{2}$

$t = 2$ を考える。

$$s\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$$

$$t\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}$$

⇩

図1

点OからPへ走ることは、まずOからCへ走り、Cから『OからBへ走るのと同じ方向に走り、その走る距離がBへ走る2倍である』ように走ったのと同じことになる。

又、和の計算の順序を変えると、$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

⇩

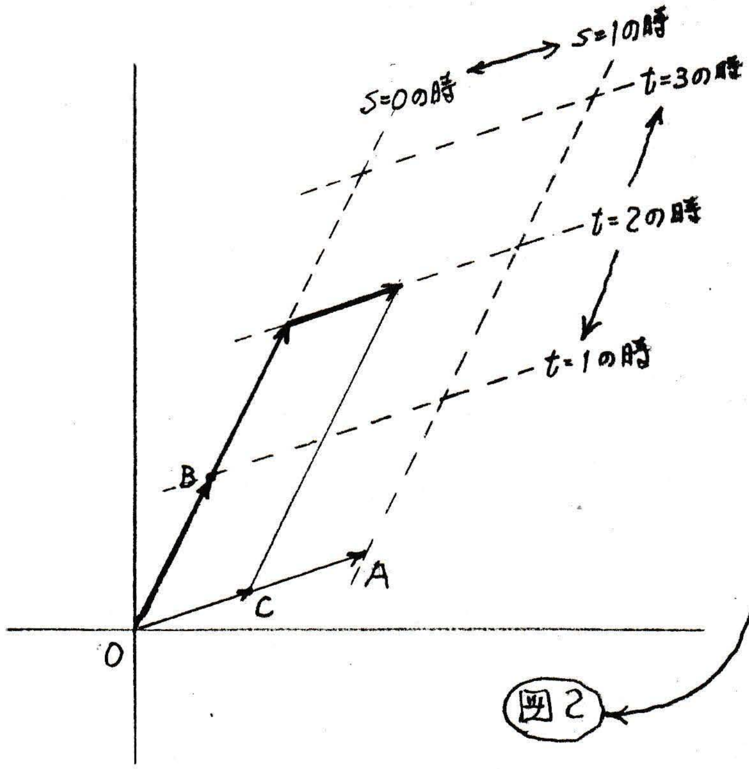


図2

点OからPへ走ることは、まずOからBの方へ向かってBまでの倍の距離を走り、次に、その点から『OからCへ走るのと同じ方向に、同じ距離だけ』走ったのと同じことになる。

ここで、どちらの道筋で走ってもたどり着く点Pは同じなのです。

⇦

これで分かり易くなれば、あとはsとtがとる範囲の値を考えてやると、▱の範囲にしかたどり着かないことがわかる!

回答用紙（補足）

会員番号：	名前：[redacted]様

H 7年12月7日　No. 5

---

2) 少し、むずかしく考えすぎたんじゃないのかな？

垂線の足と結ぶ時が、最短距離だっていうことを

利用してもいいんだよ！

次の等距離にある直線の問題は、

距離の公式からセオリー通りに求めると解答例のようになるけど、

もっと簡単に言えば、y切片が6と15の真中の$\frac{21}{2}$になる平行な

直線になっちゃうんだよ！

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{21}{2}$$

即ち　$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{7}{2}$ だ！

[redacted]君

あまり、あせらずに肩の力を抜いて

気楽に頑張ろう！

意味だけしっかりと把んでいれば大丈夫だよ。

理解できなかったら又、FAX下さい。別問題でもO.K。

ありがとうネ。

健闘を祈る。